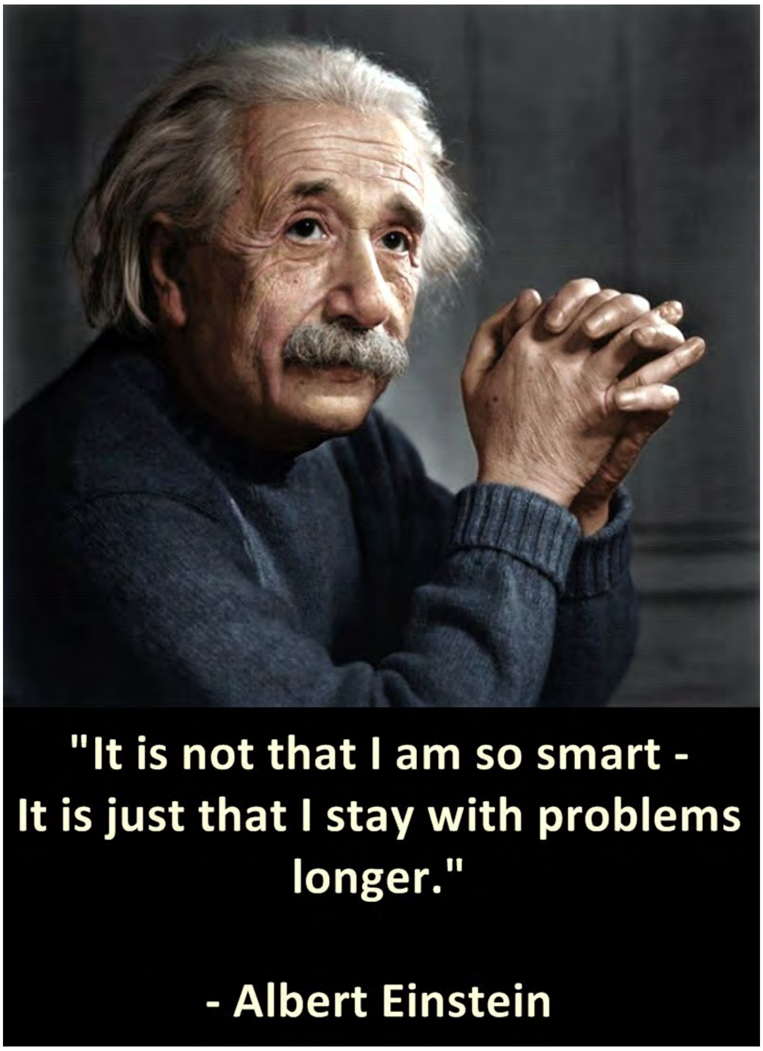
Wiskunde en Toegepaste Wiskunde

WISKUNDE INDUKSIEGIDS



Materiaal ontwikkel deur
Vakgroep Wiskunde en Toegepaste Wiskunde van die Fakulteit Natuur- en Landbouwetenskappe
Vakgroep Wiskunde-onderwys van die Fakulteit Opvoedkunde

Samesteller
Rudi van de Venter, Vakgroep Wiskunde-onderwys

Hersiener
Mariette Hitge, Vakgroep Wiskunde en Toegepaste Wiskunde

Hersieningsdatum 2024

Noordwes-Universiteit

Table of Contents

Algemene Inligting

1 Verwelkoming

Ons wens u as voornemende Wiskunde-student geluk met u keuse om universiteitstudies aan te pak.

Dit is ‘n voorreg om u te ontmoet en ‘n rol te mag speel by u voorbereiding op u studies.

Ons as akademiese personeel hoop ons dat u studies van die begin af voorspoedig en suksesvol sal verloop

2 Doel van die kursus

Hierdie kursus is ontwerp om:

- U voorkennis van Wiskunde te aktiveer;
- U brein se abstrakte en logiese werking na die vakansie aan die gang te kry;
- Vae kolle in u wiskunde-kennis en wiskunde-vaardighede op te vul’
- U met noodsaaklike kennis en vaardighede waarmee u miskien nie voorheen kennis gemaak het nie, toe te rus’
- U bekend te stel aan die werkwyse wat tydens die onderrig van universiteitswiskunde-modules gevolg word;
- Die kunsmatige afskortings tussen verskillende “gedeeltes” van Wiskunde af te breek en die verbande tussen elke “deeltjie” en die groot geheel aan te toon, asook die verbande tussen Wiskunde en ander vakdissiplines; en
- U belewenis van Wiskunde as vakdissipline te verander sodat dit vir u meer betekenis en lewe as ooit voorheen sal kry.

3 Studiemateriaal

In die ou dae het die studiemateriaal vir enige Wiskunde-kursus uit een of meer handboek en klasaantekeninge bestaan, aangevul deur addisionele materiaal vanuit biblioteke. Die prentjie is nou egter anders; u studiemateriaal vir enige moderne Wiskunde-kursus sal waarskynlik ‘n kombinasie wees van die volgende:

- Klasaantekeninge
- Een of meer handboeke
- Leermateriaal wat vanaf betroubare internetbronne verkry is
- Draagbare sakrekenaar (met of sonder die vermoë om grafieke en tabelle te genereer)
- Interaktiewe rekenaartegnologie soos gespesialiseerde programme (GeoGebra, onder andere) wat op lessenaarrekenaars en skootrekenaars geïnstalleer word
- Toepassingsprogramme wat op slimfone en tabletrekenaars geïnstalleer word (bv. GeoGebra vir tablette en fone wat met populêre bedryfstelsels werk – Android, iOS, ens.)

U moet onmiddellik besef dat die dae vir ewig verby is dat u alle materiaal wat u benodig, in u handboek en by die dosent gaan kry.

U as wiskundige moet self ‘n plan kan maak indien u met u Wiskunde-studie vasbrand – u en u klasmaats moet byvoorbeeld die vermoë ontwikkel om ‘n soekenjin (bv. Google) in te span om inligting oor enige stuk wiskunde op te spoor. **U het nie ‘n lessenaarrekenaar of skootrekenaar hiervoor nodig nie; u selfoon het al vir jare ‘n webblaaier waarmee u die soekenjins kan bereik en webblaaie oopmaak.**

Webblaaie soos Mathworks, Wolfram Mathworld en **Wolfram Alpha** is uiters waardevol en raak elke dag meer gebruikersvriendelik.

U moet ook aanleer om u redenasies en berekeninge self te toets. In die meeste gevalle is die mees gevorderde tegnologie wat u sal benodig ‘n potlood, papier en miskien ‘n sakrekenaar – Wiskunde as vakgebied is self ‘n groot abstrakte stuk tegnologie.

U vermoë om onafhanklik te kan leer sal een van u magtigste gereedskapstukke in die studie van Wiskunde wees.

4 ‘n Nuttige beskrywing van wat Wiskunde is

Wiskunde is ‘n groot versameling abstrakte idees wat almal op ‘n groot aantal maniere met mekaar verband hou. Hierdie verbande gaan oor die betekenis van die idees.

Wiskunde is onder meer ‘n masjien of taal waarmee abstrakte sowel as konkrete verskynsels op ‘n elegante manier beskryf kan word – ‘n beskrywing so elegant dat dit nie staties is nie maar gemanipuleer kan word volgens sekere afsprake en reëls om nuwe lig op die oorspronklike verskynsel te werp. Sommige geleerdes beskryf Wiskunde as die “maak van patrone” – soms is hierdie patrone sigbaar en meetbaar en die gevolge van menslike waarnemings; ander kere is hulle onsigbaar of selfs onmeetbaar en kan hulle slegs simbolies, numeries of grafies voorgestel word deur middel van **modelle**.

Wiskundige en wetenskaplike modelle is abstrakte denkvoorstellings van werklike of denkbeeldige patrone. Hierdie modelle kan verskillende vorme aanneem, bv.

- ‘n stel formules
- tabelle gevul met numeriese data
- ‘n grafiese voorstelling
- ‘n rekenaarsimulasie
- ‘n woordelikse beskrywing

Die **Wet van Ohm** wat in Graad 9 bespreek word is ‘n voorbeeld van ‘n **wiskundige model** vir die gedrag van stroom, weerstand en potensiaalverskil in ‘n eenvoudige elektriese stroombaan.

Hierdie wiskundige modelle werk volgens die beginsels wat in die teorie van Wiskunde geformuleer en uitgedruk word.

Wiskundige en wetenskaplike teorie is ‘n baie belangrike begrip, aangesien die woord teorie in die konteks van wetenskap en Wiskunde ‘n heel ander betekenis besit as die betekenis wat dit gewoonlik in die alledaagse lewe het.

In Wiskunde en wetenskap beteken die woord “teorie” NIE ‘n raaiskoot of losstaande idee of vermoede nie. ‘n Wiskundige of wetenskaplike teorie is ‘n **robuuste stelsel samehangende idees en verbande wat suksesvol gebruik kan word om waarnemings te verklaar en voorspellings te maak**. ‘n Teorie geld slegs wanneer dit sin maak en praktiese waarde het.

Drie voorbeelde van suksesvolle teorieë:

Die **teorie van eksponente en logaritmes** bevat die versameling begrippe, definisies, verbande of verwantskappe, formules en betekenisse wat ons in staat stel om onder meer die eindwaarde van ‘n vaste belegging teen saamgestelde rente te bereken. Eksponente en logaritmes is abstrakte verskynsels, so ook die wette, formules en verbande wat daarop van toepassings is – maar die teorie werk, aangesien ons dit prakties kan gebruik om betekenisvolle antwoorde op berekeninge te kry.

Die **teorieë van gravitasie** bevat die versameling begrippe, definisies, verbande of verwantskappe, formules en betekenisse wat ons in staat stel om byvoorbeeld die gedrag van ‘n vry vallende voorwerp te beskryf en selfs te voorspel. Gravitasie self is onsigbaar en so ook die universele swaartekragkonstante en die algebraïese reëls – die elemente van die Algemene Relatiwiteitsteorie is nog meer abstrak – en tog beskryf, verklaar en voorspel hierdie teorieë die waarnemings wat ons maak wanneer voorwerpe aan gravitasie onderwerp word.

Die **teorie van evolusie** bevat die versameling begrippe, definisies, wetmatighede en betekenisse wat ons in staat stel om die lang-termyn patrone wat by die studie van spesies in die natuur waargeneem word, te verklaar. Dit verklaar en beskryf die fossiele wat waargeneem word, asook die eienskappe van die DNS van organismes. Groot dele van die moderne mediese wetenskap is die gevolg van die suksesvolle toepassing van die teorie van evolusie. Hierdie teorie verklaar ook waarom die meeste moderne organismes (die mens ingesluit) se DNA tot ‘n baie hoë persentasie met dié van ander organismes (selfs plante en diere) ooreenstem.

Teorie is dus uiters noodsaaklik by enige wetenskap, ook by Wiskunde: Dit verskaf die raamwerk waarbinne en die meganismes waarmee die bepaalde studieveld werk. Daarom is dit fataal as u Wiskunde sien as ‘n blote versameling van resepte en reëls; Wiskunde gaan oor die patrone en verbande (konneksies) tussen abstrakte begrippe – die sogenaamde reëls en wette van Wiskunde is eintlik veralgemenings van die patrone en verbande wat ons ontdek wanneer ons met getalle, simbole, bewerkings ens. werk.

U kennis en vaardighede van Wiskunde mag dus nie in netjiese afsonderlike kompartemente bestaan, soos gereedskapstukke wat op die rakke van ‘n pakkamer gestoor word nie.

Dit moet eerder 'n netwerk wees van begrippe en vaardighede, waar elke deel van die netwerk op baie maniere met al die ander dele van die netwerk verbind is.

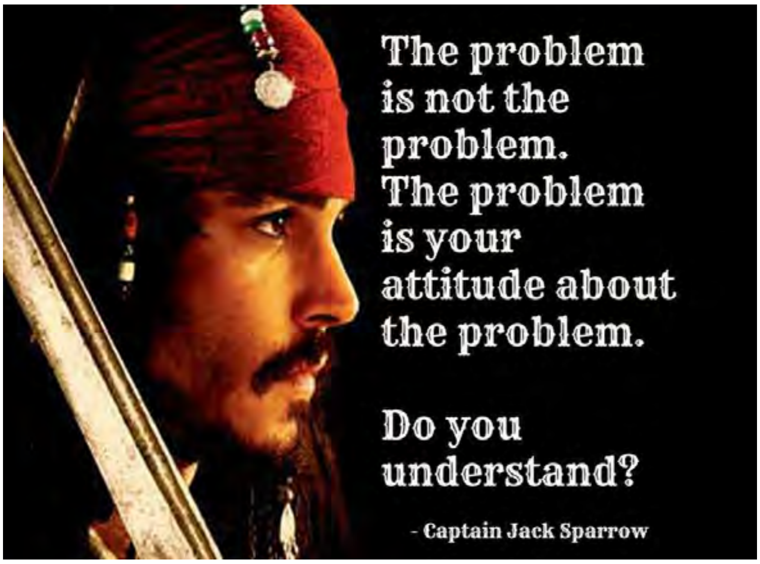
So is die subvelde van Wiskunde, byvoorbeeld algebra, Euklidiese meetkunde, trigonometrie en differensiasie, kunsmatige indelings wat mense maak om die vakgebied te organiseer – **daar bestaan in werklikheid geen werklike skeidings tussen hierdie subvelde nie en elkeen van hulle is met elkeen van die ander verbind. Wanneer ons 'n wiskundige probleem oplos, gebruik ons tipies idees wat uit meer as een subveld kom**. Die bewys van 'n trigonometriese identiteit, byvoorbeeld, benodig kennis van meetkunde, trigonometrie en algebra.

U studie van Wiskunde verloop dus nie soos 'n huis wat onbeweeglike steen vir onbeweeglike steen, laag op laag, netjies van onder na bo opgebou word nie – dit verloop eerder soos 'n boom, wat van onder na bo groei deur te vertak en weer te vertak, elke takkie uniek en afsonderlik maar tog aan elke ander deel van die boom verbind as 'n vaste maar buigsame eenheid.

5 Hoe om Wiskunde te bemeester

Die studie van Wiskunde verg **fokus en tyd**.

- Maak ten alle tye seker dat u elke stukkie van elke bespreking verstaan.
- Wiskunde is die wetenskap van betekenis-making. **Indien u 'n stuk werk moet memoriseer omdat u die betekenis daarvan nie kan verstaan nie, dan is u nie meer met Wiskunde besig nie**.
- Indien u aanvanklik nie 'n greep op 'n begrip of metode kan kry nie, werk verder en probeer 'n voorbeeld in die hande kry waar met daardie begrip of metode gewerk word. Werk hierdie voorbeeld deur en gaan dan terug na die bespreking wat u aanvanklik nie kon verstaan nie.
- Probeer insien waar die nuwe stukkie werk inpas en met watter vorige werk wat u al gedoen het, dit verband hou. **Soek patrone en konneksies – daar is fout indien u enige nuwe stukkie werk as 'n afsonderlike aparte deeltjie beskou wat losstaan van die res van u Wiskunde-kennis**.
- **Maak gedurig planne om u antwoorde te toets**. Dit help om u begrip uit te brei.
- Raak gemaklik daarmee om saam met een of meer klasmaats te werk. Bespreek enige nuwe openbarings wat u ontvang terwyl u deur 'n stuk werk met mekaar.
- Maak gedurig u eie notas en opsommings in 'n vorm wat u self goed verstaan.
- **Bestee tyd**. Dit is die belangrikste hulpbron. Kyk weer na die aanhaling op die voorblad van hierdie werkboek:



1 Logika, algebraïese vaardighede en eksponente

Leerdoelstellings vir hierdie leereenheid

Na afhandeling van hierdie leereenheid moet die student in staat wees om die volgende te doen:

1. Basiese logika beginsels verstaan en toepas.
2. Te onderskei tussen die volgende instruksies/aksiewoorde: Vereenvoudig, faktoriseer, los op, differensieer, bewys die identiteit.
3. Te onderskei tussen die volgende konsepte: Uitdrukking, term, teller, noemer, faktor, oplossing, vergelyking.
4. Die eienskappe van reële getalle en hulle bewerkings korrek toe te pas.
5. Die absolute waarde van ‘n getal te definieer en die eienskappe daarvan in berekeninge en redenasies te gebruik.
6. Die eienskappe van eksponente te kan gebruik om uitdrukkings te vereenvoudig.
7. Toepaslike eksponensiële vergelykings op te los deur die eienskappe van eksponente te gebruik.

1.1 Logika

Oorweeg die volgende stelling waarmee jy dalk bekend is.

As a en b die sylengtes van 'n reghoekige driehoek is en c die sylengte van die skuinssy, dan is $a^2 + b^2 = c^2$.

Hierdie stelling neem die vorm aan van 'n sogenaamde "as-dan"-stelling, of implikasie. Dit is belangrik in wiskunde dat ons presies verstaan wat ons bedoel wanneer ons hierdie soort stellings maak. Wanneer presies sal hierdie stelling waar of onwaar wees en hoe kan ons so 'n stelling as waar of onwaar bewys. In wiskunde moet ons slegs stellings soos die een hierbo aanvaar as daar 'n formele wiskundige bewys is. Om dit te help verstaan, sal ons jou aan die basiese beginsels van logika bekendstel.

Wanneer jy 'n stelling bewys of 'n berekening doen, moet jou werk logies volg. Logika is die studie van geldige redenasie.

Ons sal 'n paar konsepte moet verstaan. 'n **Sin** sal na enige kombinasie van woorde verwys, wat ook getalle of wiskundige simbole kan insluit. Streng gesproke **Waar** en **Onwaar** sal bloot etikette wees wat ons aan sekere sinne gee, maar jy mag dit op die intuïtiewe manier interpreteer. Dit bring ons by die eerste belangrike definisie.

'n **Proposisie** is 'n sin wat óf waar óf onwaar is, maar nie albei nie.

Die volgende sinne is proposisies.

1. Plato was 'n man.
2. $2 + 2 = 4$.
3. $2 + 3 = 4$.
4. Die maan is gemaak van kaas.
5. $5 < 3$.

Die volgende is nie proposisies nie.

1. Wie was Plato? ('n Vraag is nie 'n voorstel nie.)
2. $5 + 3$ (Daar is geen waarheidswaarde aan hierdie uitdrukking nie.)
3. $x = 2$ (Totdat x gespesifiseer is, is dit nie waar of onwaar nie).

Ons kan meer komplekse proposisies uit ander proposisies konstrueer. Mens kan dit doen deur logiese verbindings te gebruik. Die verbindings wat jy die meeste in wiskunde sal sien, is die volgende.

Ontkenning	$\neg$	nie
Samevoeging	$\vee$	of
Disjunksie	$\wedge$	en
Implikasie of voorwaardelik	$\Rightarrow$	As … dan …
Tweerigting-implikasie of bivoorwaardelik	$\Leftrightarrow$	… indien en slegs as …

Voorbeeld

Laat A die stelling wees "die deur is gesluit", B die stelling "die deur kan nie oopmaak nie".

1	Dit is nie so dat die deur nie kan oopmaak nie, dit wil sê die deur kan oopmaak.	$\neg B$
2	Die deur is gesluit, of die deur kan oopmaak.	$A \vee \neg B$
3	Die deur is gesluit, en die deur kan nie oopmaak nie.	$A \wedge B$
4	As die deur gesluit is, kan die deur nie oopmaak nie.	$A \Rightarrow B$
5	Die deur is gesluit as en slegs as die deur nie kan oopmaak nie.	$A \Leftrightarrow B$

Neem 'n bietjie tyd om te dink wat die verskil tussen elk van hierdie sou wees, en onder watter omstandighede dit waar of onwaar kan wees.

Soms wil mens argumente maak soos as $x + 2 < 5$ dan $x < 3$. Nie $x + 2 < 5$ of $x < 3$ is streng gesproke proposisies nie, maar dit sou wees as ons 'n waarde vir x kies. Die konvensie is dan om dit as $x + 2 < 5 \Rightarrow x < 3$ te skryf. Daar is 'n verskil tussen → en ⇒, maar die meeste wiskundiges is geneig om hulle wederkeurig te gebruik.

Die betekenis van elke verbinding is soos volg.

1. $\neg A$ is waar as A onwaar is en $\neg A$ is onwaar wanneer A waar is.
2. $A \vee B$ is slegs onwaar as beide A en B onwaar is, anders is dit waar.
3. $A \wedge B$ is slegs waar as beide A en B waar is.
4. $A \Rightarrow B$ is onwaar wanneer A waar is, maar B is onwaar, anders is dit waar.
5. $A \Leftrightarrow B$ is waar wanneer A en B dieselfde waarheidswaardes het, dit wil sê hulle is albei waar of albei onwaar.

Vir 'n stelling wat uit baie ander stellings en verbindings bestaan, is dit dikwels nuttig om die waarheidswaardes daarvan in 'n waarheidstabel aan te toon. Die waarheidstabel vir stellings A en B met die logiese verbindings wat bespreek is, word hieronder gegee.

A	B	$\neg A$	$A \vee B$	$A \wedge B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
Waar	Waar	Onwaar	Waar	Waar	Waar	Waar
Waar	Onwaar	Onwaar	Waar	Onwaar	Onwaar	Onwaar
Onwaar	Waar	Waar	Waar	Onwaar	Waar	Onwaar
Onwaar	Onwaar	Waar	Onwaar	Onwaar	Waar	Waar

1.2 Instruksies, aksiewoorde en inleidende begrippe in wiskunde

Wiskunde as menslike aktiwiteit is eintlik 'n sekere manier om die konkrete en abstrakte wêreld te ondersoek.

Wanneer 'n ingenieur, ekonoom, natuurwetenskaplike, onderwyser of wie ook al "wiskunde doen" beteken dit eintlik dat hy 'n situasie op 'n sekere manier beskou en volgens sekere kreatiewe beginsels probeer om daardie situasie beter te verstaan.

Dit is eintlik verskriklik kunsmatig om wiskunde te reduseer tot "die doen van somme" of selfs tot "die oplos van probleme". Tog is dit dikwels wat van ons in wiskunde-klasse of tydens wiskundige take en toetse verwag word.

Ons moet dus tog eers fokus op watter soort wiskundige probleme ons kan teëkom, sodat ons kan agterkom wat ons in elke geval moet doen om "die antwoord te kry".

In wiskunde-lesings, tydens wiskunde-oefensessies en gedurende wiskundetoetse kom ons instruksies of aksiewoorde teë wat vir ons aandui wat ons moet doen. Voorbeelde van sulke aksiewoorde is:

- Vereenvoudig
- faktoriseer
- los op vir
- differensieer (bepaal $\frac{dy}{dx}$)
- integreer (bepaal $\int f(x)dx$)
- bewys die identiteit

By die toepassing van wiskunde in ander vakgebiede soos rekeningkunde, ekonomie, fisika, chemie, rekenaarwetenskap en statistiek is die werklikheidsgetroue probleme wat ons moet oplos, dikwels nie in terme van aksiewoorde gedefinieer nie:

- Bepaal die eindwaarde van die belegging.
- Vergelyk die vraag- en aanbod-grafieke.
- Bereken die maksimum hoogte van die projektiel.
- Wat die konsentrasie van die oplossing na 30 sekondes?

By die toepassing van wiskunde in ander vakgebiede moet ons dus meestal self bepaal watter wiskundige instruksies of aksiewoorde geïmpliseer word. 'n Mens leer deur ervaring hoe om werlikheidsgetroue probleme in wiskundige instruksievorm te interpreteer.

Let ten slotte daarop dat "'n probleem" in wiskunde eintlik nie iets negatiefs is wat vermy moet word, soos wat die woord in die alledaagse lewe verstaan word nie. In wiskunde is "'n probleem" in werklikheid die instrument of gereedskapstuk waardeur ons tot kennis en insig van wiskunde self kom, asook begrip van die situasie waaruit die probleem spruit.

'n Mens leer wiskunde dus deur probleemsituasies te bestudeer en op allerlei maniere te hanteer. Meestal lê die leer-waarde van 'n wiskundige probleem in die prosesse waardeur die probleem hanteer word, eerder as net in die oplossing. Daarom het elke wiskunde-probleem wat u doen, waarde – selfs al kry u nie die "mees korrekte antwoord" in die hande nie.

Daar is baie aksiewoorde in wiskunde waarmee u nog in u verdere studie te doen sal kry.

Maak seker dat u presies weet wat elke aksiewoord beteken en hoe die oplossing lyk wat by daardie aksiewoord (instruksie) pas.

Oefening 1.1

1. Beskou elkeen van die volgende gegewe probleme. By elkeen moet u self besluit wat om te doen (wat die instruksie by daardie vraag moet wees). By sommige van hulle kan daar twee of meer moontlike instruksies wees. Doen dan die berekening(s) wat by die instruksie(s) pas.

   1.1. $-2x^2 + 7x - 6$

   1.2. $(p-2)(p^2+2p+4)$

   1.3. $\frac{(10-5t)(2+t)}{t-3} = 0$

   1.4. $30k^3 - 22k^2 - 28k = 0$

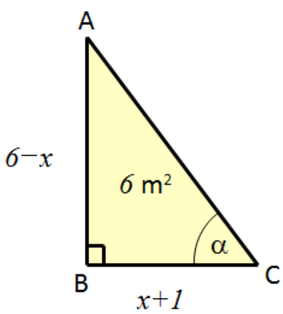
   1.5. $f(x) = 6\sqrt{x} - \frac{3}{x} + 5x$

   1.6. $p(x) = x^3 + 6x^2 - x + 30$ en $p(3)$.

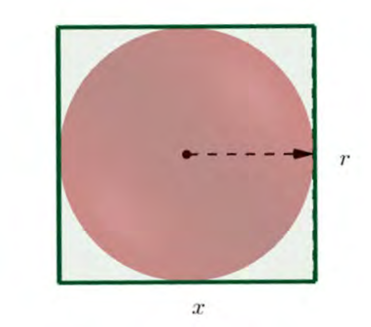
   1.7. $x^3 + 6x^2 - x + 30 = 0$ en $x + 2$ is 'n factor.

   1.8. $\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}$

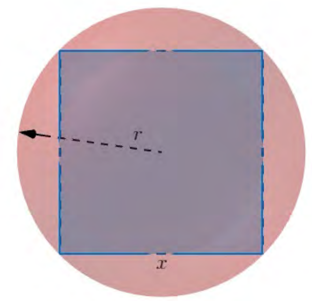
   1.9. Gegee



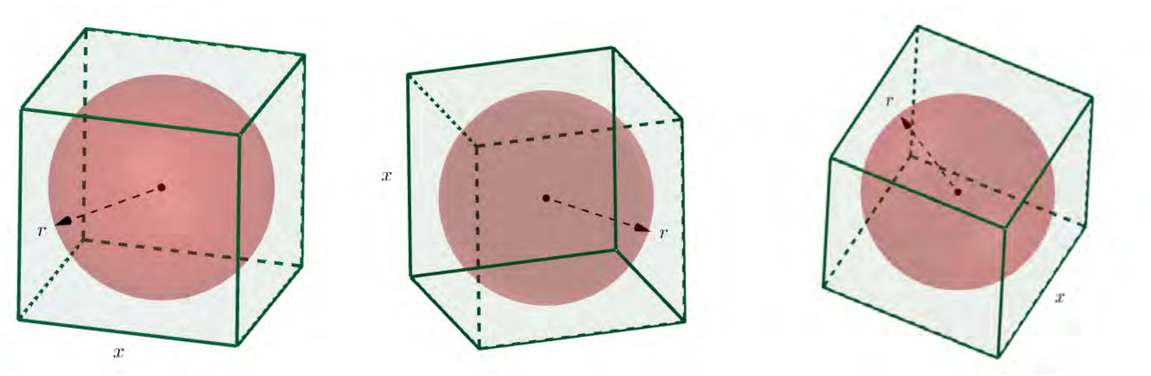
2. Gegee: ‘n Sirkel wat ingeskrewe is binne ’n vierkant. Bewys dat die oppervlakte van die ongeskakeerde gebied in terme van die radius van die sirkel gegee word deur die formule $A = r^2(4 - \pi)$.



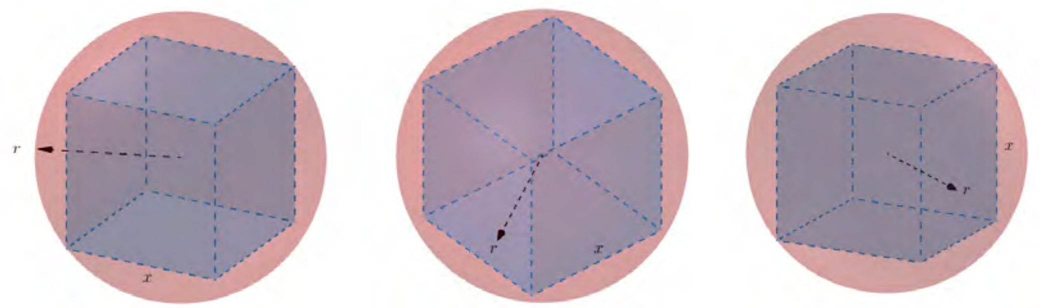
3. Gegee: ‘n Vierkant wat ingeskrewe is binne ’n sirkel. Bewys dat die oppervlakte van die gebied wat oorbly indien die vierkant verwyder word in terme van die radius van die sirkel gegee word deur die formule $A = r^2(\pi - 2)$.



4. Gegee: Drie aansigte van ‘n sfeer wat presies binne ‘n kubus pas. Bewys dat die volume van die hol liggaam wat ontstaan as die sfeer uit die kubus verwyder word, gegee word deur $V = x^3\left(1 - \frac{\pi}{6}\right)$.



5. Gegee: Drie aansigte van ‘n kubus wat presies binne-in ‘n sfeer pas. Bewys dat die volume van die hol liggaam wat ontstaan as die kubus uit die sfeer verwyder word, gegee word deur $V = x^3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\pi - 1\right)$.



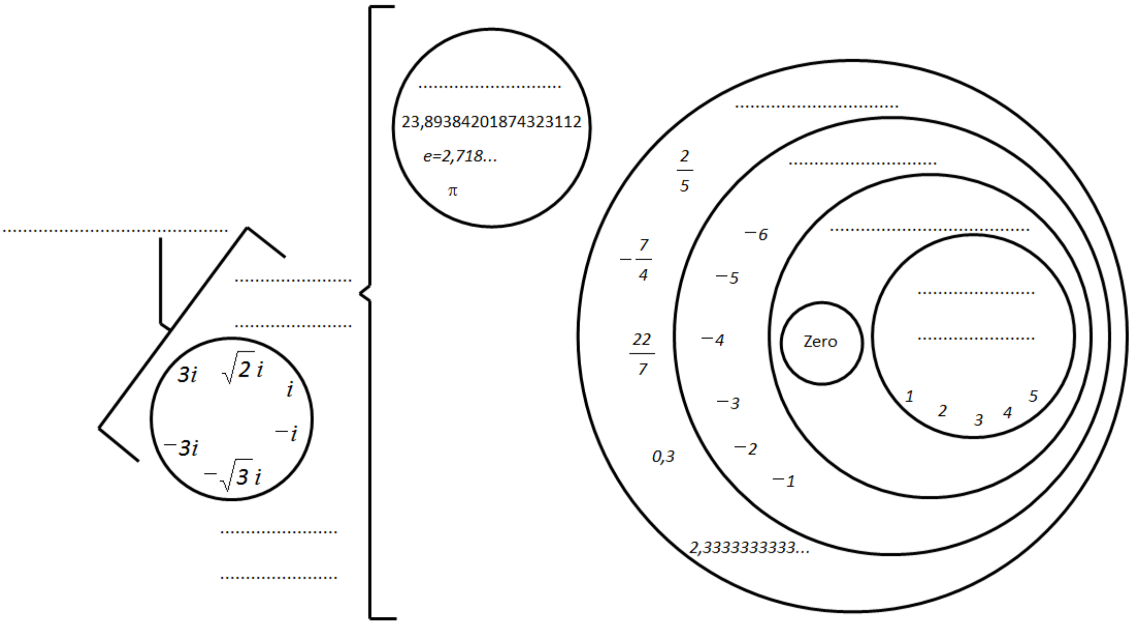
Soos u kan sien, is elke probleem op sy eie manier oneindig interessant, dikwels met verskillende aspekte waarin ons kan belangstel.

1.3 Die reële getalle

Getallestelsels

Ons klassifiseer getalle (abstrakte mensgemaakte simboliese en konseptuele voorstellings wat aantal en hoeveelheid voorstel) volgens hulle eienskappe soos volg:

(Voorsien die beskrywende name van elkeen van die volgende versamelings)



Bogenoemde verwantskappe word ook in versamelingsnotasie soos volg geskryf.

$\mathbb{N} = \{1; 2; 3; 4; \ldots\}$ (natuurlike getalle)

$\mathbb{N}_0 = \{1; 2; 3; 4; \ldots\}$ (telgetalle)

$\mathbb{Z} = \{\ldots; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; \ldots\}$ (heelgetalle)

$\mathbb{Q} = \left\{x | x = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\right\}$ (rasionale getalle)

$\mathbb{I} = \{x | x \in \mathbb{R}, x \notin \mathbb{Q}\}$ (irrasionale getalle)

$\mathbb{R} = \{x | x \in \mathbb{Q}$ of / or $x \in \mathbb{I}\}$ (reële getalle)

Dit volg dat al die versamelings hierbo genoem deelversamelings is van die reële getalle, d.w.s. $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ en $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$

Verder volg dat $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$ en $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$.

Wat beteken bogenoemde in woorde? U **MOET** weet!

Basiese eienskappe van die reële getalle

Gestel a en b en c is reële getalle. Dan geld:

1. Eienskappe van die getal nul (optellingsidentiteitselement)

1.1 $a + 0 =$ ....

1.2 $a \times 0 =$ ....

1.3 $\frac{0}{a} =$ .... met $a \neq 0$

1.4 $\frac{a}{\ldots\ldots}$ is ongedefinieer.

1.5 As $ab =$ .... dan $a = 0$ of $b = 0$ (...........-produkstelling)

1.6 As $\frac{a}{b} = 0$ dan $a =$ .... en $b \neq$ ....

2. Bewerkingseienskappe van reële getalle

2.1 Geslotenheid: $a + b \in \mathbb{R}$ en $ab \in \mathbb{R}$

2.2 Kommutatiwiteit: $a + b =$ .... and $ab =$ ....

2.3 Assosiatiwiteit: $(a + b) + c = a + (b + c)$ and $(ab)c = a(bc)$

2.4 Identiteit: $a + 0 =$ .... and $a \times 1 =$ ....

2.5 Optellingsinverse: $a + (-a) =$ ....

2.6 Vermenigvuldigingsinverse $a \times \frac{1}{a} =$ .... waar $a \neq 0$.

2.7 Distributiwiteit: $a(b \pm c) =$ ....

3. Volgorde van algebraïese bewerking (berus op afsprake en patrone)

3.1 Vir herhaalde optelling en aftrekking werk ons van links na regs.

3.2 Vir herhaalde vermenigvuldiging en deling werk ons van links na regs.

3.3 Vir gekombineerde bewerkings kan ons nie net van links en regs werk nie, maar word optelling en aftrekking laaste gedoen. Uitdrukkings in hakies word eerstens verreken – dan vermenigvuldiging en deling (gelyke prioriteit) en laastens word opgetel en afgetrek.

3.4 Vir gekombineerde bewerkings is die volgorde soos volg:

Prioriteit	**Bewerking**	**Verduideliking**
1	() hakies	**Met hakies binne hakies word die binneste hakies eerste verwyder**
2	Magsverheffing en Worteltrekking	Moet as spesiale hakies beskou
3	van	vervang met ‘n $\times$-teken
4	$\times$ en / of $\div$	Gelyke prioriteit
5	$+$ en / of $-$	Gelyke prioriteit

Sommige wiskundiges vereenvoudig bogenoemde skema soos volg:

Identifiseer alle plus en minus tekens buite hakies. Evalueer dan alle uitdrukkings tussen plus en minus tekens (faktore) en tel laastens op en trek af.

Die belangrikste sake wat u omtrent algebra moet verstaan, is dat:

- Enige uitdrukking of formule uit terme saamgestel is – die terme word deur plustekens en minustekens geskei (wortels, eksponente, maal en deel skei NIE terme van mekaar nie)
- Wat dus ook al tussen plustekens en minustekens staan, moet as een getal gelees en verstaan word. “Algebraïese terme” beteken “stukke van ‘n uitdrukking wat deur plus en minus van mekaar geskei word”.
- Hakies groepeer alles wat daarbinne saam as een getalwaarde – daarom bereken ons altyd die inhoud van ‘n stel hakies heel eerste.
- ‘n Horisontale deelteken (lyntjie met teller bo en noemer onder) plaas outomaties alles in die teller en alles in die noemer in hakies.

4. Ontoelaatbare bewerkings by reële getalle

Vereenvoudig die volgende uitdrukking:

$$\frac{3}{7+\sqrt[3]{-343}}+\log_{10}(-10)+\frac{7}{\log_{10}1}-2\sqrt{3+\sqrt[3]{-64}}+\arcsin 2+\arccos(-1.5)-\tan(90°)$$

Gebruik u bevindinge en maak ‘n lys van ontoelaatbare bewerkings. Bring elke ontoelaatbare bewerking in verband met die definisieversameling van ‘n funksie.

Ons moet altyd bedag wees op gevalle soos hierbo, waar getalle interessante ongewone gedrag vertoon.

Oefening 1.2

1. Bepaal die waarde van die volgende uitdrukkings (met ander woorde, **evalueer** die volgende) sonder enige sakrekenaar.

   1.1. $\frac{3(4)}{2}+6(2+3)-\frac{27-7}{7+3}$

   1.2. $4-3|(-2)(3)|+\frac{5^3}{25}-\frac{12}{2+\frac{2}{5}}-\sqrt{5^2-3^2}$

   1.3. $\frac{2\sqrt{169-144}}{5}+\frac{|8-16|}{2^3}-\sqrt{|64-128|}+\frac{100-25}{(10-5)^2}$

   Die simbool |’n reële getal| staan bekend as die “absolute waarde bewerking”. In die algemeen geld dit dat |’n reële getal| = positiewe waarde van daardie reële getal. Later meer hieroor.

   1.4.

$$\frac{\frac{7}{\sqrt{144}}-\frac{6^0}{\sqrt[3]{216}}}{\frac{\sqrt[3]{1000}}{(48-3(2)^3}}+\left(\frac{1}{\frac{1}{2}-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{2}+\frac{5^0}{\sqrt{64}-\frac{2^3}{5-\frac{12-3}{9-\sqrt{\frac{72}{\frac{5}{2}-\frac{1}{2}}}}}}}\right)^{\sqrt{12-8}}-3\left(12-\frac{5}{\left(\frac{1}{2}\right)}\right)^5+\left(\frac{10^2}{10^2+3}\right)^2\cdot\left(1+\frac{3}{10^2}\right)^2$$

2. Bepaal die waarde van die volgende uitdrukkings (met ander woorde, **evalueer** die volgende) sonder enige sakrekenaar, indien moontlik. Anders verduidelik waarom nie.

   2.1. $\frac{4-\sqrt{16}}{3+2}$

   2.2. $\frac{12-8}{10-\sqrt{100}}$

   2.3. $5-\sqrt{16-25}$

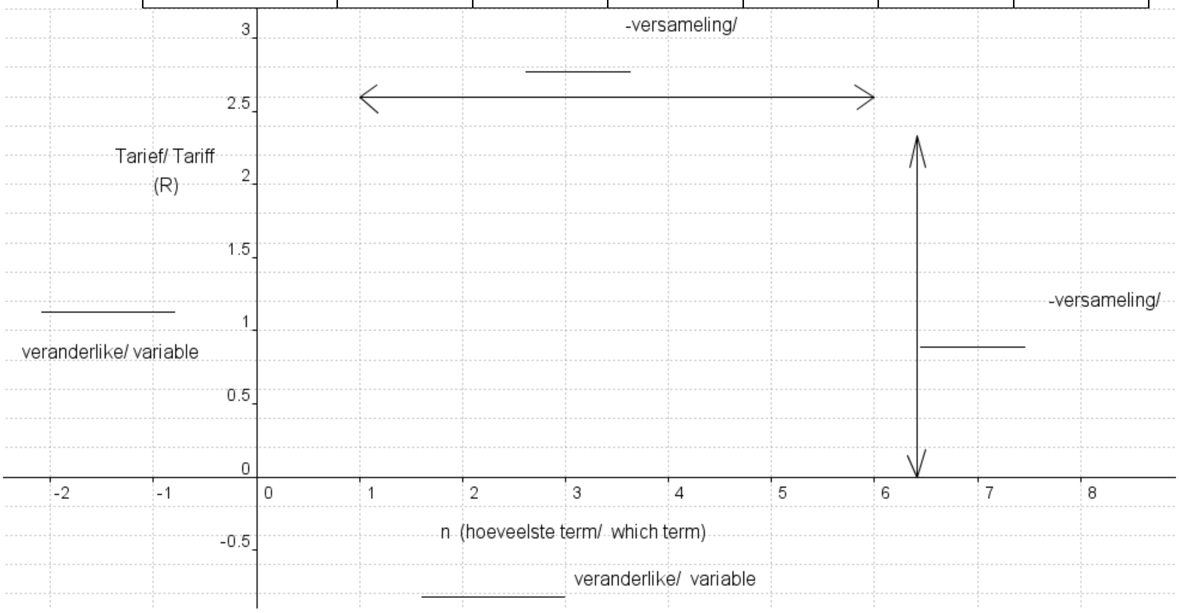
   2.4. $3-2\sqrt{169-25}$

1.4 Eksponente

'n Maatskappy beoog om vir die volgende vyf jaar ‘n tariefverhoging van 20% per jaar in te stel op 'n diens wat in 2016 per eenheid R1.10 gekos het.

Voltooi die volgende tabel en grafiek.

Jaartal	2016	2017	2018	2019	2020	2021
Term nr. (n)	1	2	3	4	5	6
Tarief	1,10					



Lê die punte in ‘n reguit lyn?

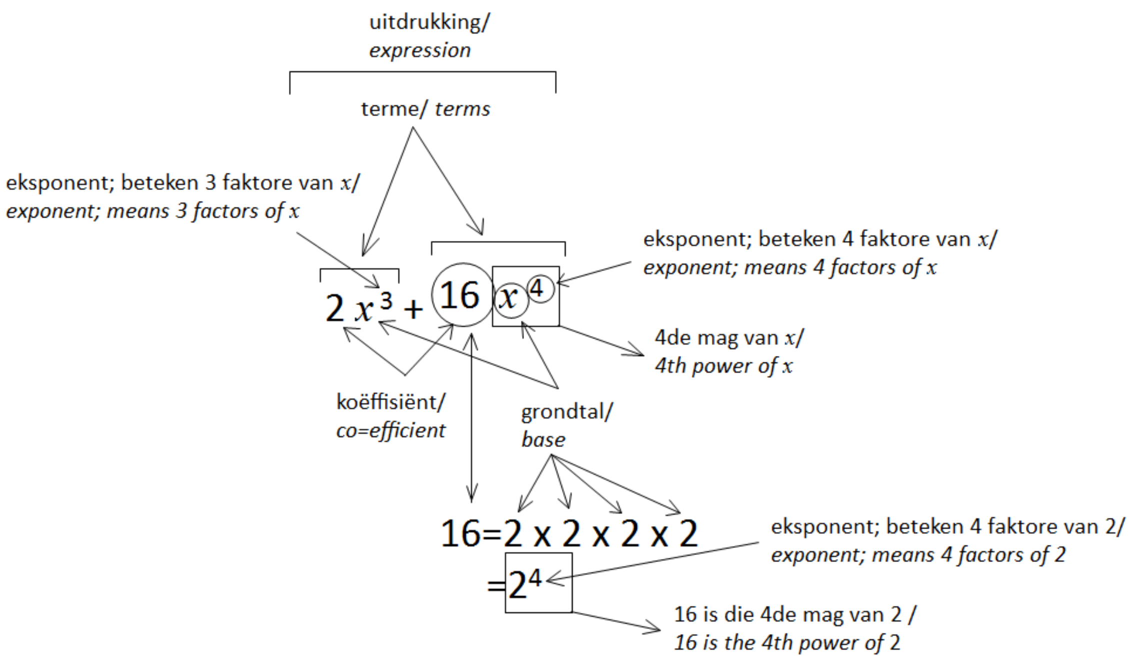
Bogenoemde is ‘n voorbeeld van **eksponensiële gedrag**; dit het met herhaalde vermenigvuldiging van ‘n sekere konstante waarde te doen.

Kan u ‘n formule vir vergelyking van u grafiek in terme van n neerskryf?

Die formule vir die algemene term van ‘n meetkundige ry is ‘n voorbeeld van ‘n **eksponensiële funksie**.

Ons definieer in die algemeen: $x \times x \times x \times x \times ... \times x = x^n$ as n faktore van x.

As byvoorbeeld $2x^3 + (2x)^4 = 2x^3 + 16x^4$ dan



Gebruik u kennis en voltooi die ontbrekende inligting in die volgende tabel.

Eienskappe van eksponente

Eienskap	Voorbeeld	Pasop
$a^0 = \ldots\ldots\ldots\ldots$	$10^0 = \ldots\ldots\ldots\ldots$	$0^0 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
$a^1 = \ldots\ldots\ldots\ldots$	$5^1 = \ldots\ldots\ldots\ldots$	$0^1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
$a^m \times a^n = \ldots\ldots\ldots\ldots$	$10^2 \times 10^3 = 100\,000 = 10^{\ldots\ldots}$	$a^m \times a^n \neq a^{mn}$
$\dfrac{a^m}{a^n} = \ldots\ldots\ldots\ldots$	$\dfrac{10^6}{10^3} = \dfrac{1000000}{1000} = 10^{\ldots\ldots}$	$\dfrac{a^m}{a^n} \neq a^{\frac{m}{n}}$
$\left(\dfrac{a^m}{b^n}\right)^p = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$	$\left(\dfrac{10^3}{2^2}\right)^4$ $= \left(\dfrac{1000}{4}\right)^4$ $= 250^4 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\dfrac{10^{12}}{2^8}$ $= \dfrac{2^{12} \times 5^{12}}{2^8} = 2^4 \times 5^{12}$ $= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$	$\left(\dfrac{a^m}{b^n}\right)^p \neq \left(\dfrac{a}{b}\right)^{mp-np}$
$(a)^{-n} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$	$2^{-3} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-4} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$	$(a)^{-n} \neq -a^n$ $(a)^{-n} \neq a^{\frac{1}{n}}$
$\sqrt[n]{a^m} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$	$\sqrt{x} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\sqrt[3]{y^6} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$	$\sqrt[n]{a^m} \neq a^{\frac{n}{m}}$ $\sqrt[n]{a^m} \neq a^{m-n}$
$\sqrt[n]{ab} = \ldots\ldots \times \ldots\ldots$	$\sqrt{64t^8} = \sqrt{\ldots\ldots} \times \sqrt{\ldots\ldots}$ $=$	$\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$ $\sqrt{x^2 \pm y^2} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Bogenoemde mag moontlik eenvoudig en nie skouspelagtig lyk nie, maar die foute wat met die toepassing van hierdie beginsels gemaak word, **gaan die verstand te bowe**.

Oefening 1.3

1. Vereenvoudig sonder 'n sakrekenaar.

   1.1. $4(a+b)^4 - 4(a \times b)^2$

   1.2. $\left(\frac{3}{2}x^2\right)\left(\frac{3}{2}x^2\right)\left(\frac{3}{2}x^2\right) - \left(\frac{3}{2}x^2\right)^3 - \left(\frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x^2\right)^3$

   1.3. $[(z^2)^2]^{-1} \cdot (z^{-1})^3$

   1.4. $(p-m)(p^2 + pm + m^2)$

   1.5. $(2x+3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2)$

1.6. $(a-b)^3$

1.7. $\frac{t^3+t^2}{t^5}$

1.8. $\frac{r^3+r^3}{2r^2+3r^2}$

1.9. $\frac{3^{\alpha}.9^{\alpha+1}}{27^{\alpha+2}}$

1.10. $\frac{5^{\beta+2}+5^{\beta+1}}{5^{\beta+2}-5^{\beta+1}}$

2. In Matriek het jy die volgende differensiasiereël teëgekom.

$$\frac{d}{dx}(ax^n) = an \cdot x^{n-1}$$

byvoorbeeld

$$\frac{d}{dx}\left(3x^4 - 5x^2 + \frac{1}{2}x - 9\right) = 12x^3 - 10x + \frac{1}{2}.$$

Bereken nou $g'(t)$ iindien …

2.1. $g(t) = 3\sqrt{t} + \frac{2}{5t}$

2.2. $g(t) = 4\sqrt[3]{t^2} - \frac{5}{3t^2} + \frac{2}{3\sqrt{t}} + \pi$

3. Vereenvoudig

$$\frac{4^x \times 5^x}{20} + \frac{10^{3y}}{(2^y \times 5^y)^2}$$

1.5 Eenvoudige eksponensiële vergelykings

Uit die eienskappe van eksponente kan ons sekere vergelykings oplos, waar eksponente betrokke is.

Oefening 1.4

1. Bereken sonder 'n sakrekenaar die waarde van die onbekende.

1.1. $9^{y-2} = 27^{1-2y}$

1.2. $4^{3p} - 32^{2p-5} = 0$

1.3. $3 \cdot 10^x - 0.03 = 0$

1.4. $6 \cdot 2^x - 2^x - 1 = 0$. Verklaar waarom daar slegs een oplossing is.

1.5. $2r^5 = -\frac{243}{16}$. Hoe verskil hierdie vergelyking van die vorige vier?

1.6 Die natuurlike getal e

Enige positiewe getal kan as 'n grondtal van die eksponensiële funksie gebruik word. 'n Getal wat dikwels as 'n grondtal in modellering gebruik word is die getal e.

Beskou die uitdrukking $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Ons ondersoek nou wat gebeur as $n \to \infty$, d.w.s. as n baie groot word.

Voltooi onderstaande tabel akkuraat tot 5 desimale plekke.

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1	
10	
100	
1 000	
10 000	
1000 000	
10 000 000	

Dit volg dat die uitdrukking $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ na 2,71828… sal streef as $n \to \infty$. Bereken nou die waarde van die volgende, ook korrek tot 5 desimale.

$$\sum_{k=0}^{1} \frac{1}{k!}, \quad \sum_{k=0}^{3} \frac{1}{k!}, \quad \sum_{k=0}^{7} \frac{1}{k!}$$

Die getal e word gedefinieer as

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \text{ of } e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

Die funksie $f(x) = e^x$ staan ook bekend as die natuurlike eksponensiële funksie en sy eienskappe is soortgelyk aan die algemene eksponensiële funksie $f(x) = a^x$ met $a > 1$.

Die natuurlike eksponensiële funksie $f(x) = e^x$ is **stygend vir alle reële waardes van** x.

Die natuurlike eksponensiële funksie word gebruik om **kontinue rente**, **bevolkingsgroei** en verskeie ander verskynsels uit die werklike lewe te beskryf.

Daar bestaan in Wiskunde 'n natuurlike grondtal, wat ons met die simbool e aandui. Die waarde van e word in later Wiskunde-kursusse afgelei, maar ons neem die **benaderde waarde** as $e \approx 2.71828$ ...

Hierdie grondtal gehoorsaam al die gewone eksponentwette**.**

Oefening 1.5

1. Gebruik 'n grafiese sakrekenaar of grafiese sagteware om die volgende ses funksies grafies voor te stel en kyk of u die eienskappe wat hierbo genoem is, kan waarneem.

    1.1. $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$. Kyk veral na die gedrag vir $x \to \infty$.

    1.2. $g(x) = 2^x$

    1.3. $h(x) = e^x$

    1.4. $m(x) = 3^x$

    1.5. $r(x) = e^{x-2} - 2$

    1.6. $u(x) = 2e^{x+1} - 8$

2. Vereenvoudig sonder die gebruik van 'n sakrekenaar. Gebruik 'n sakrekenaar om die benaderde waarde in die laaste stap te bereken.

$$e^2 + 3e^2 + e^2 \cdot e^{-2} - \frac{e^5}{e^3} + e^0$$

2 Logaritmes

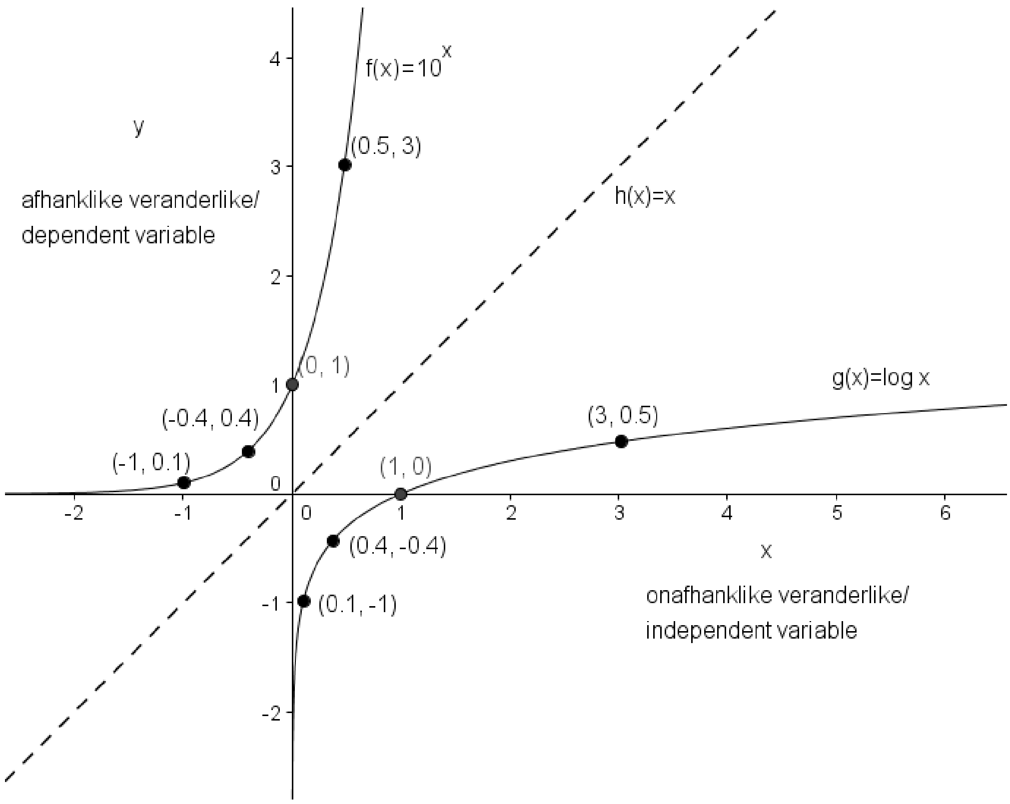
Leerdoelstellings vir hierdie leereenheid

Na afhandeling van hierdie leereenheid moet die student in staat wees om die volgende te doen:

1. Die eienskappe van logaritmes te kan gebruik om uitdrukkings te vereenvoudig.
2. Die eienskappe van logaritmes te kan gebruik om logaritmiese vergelykings op te los.
3. Ingewikkelder eksponensiële vergelykings op te los deur van die verbande tussen eksponente en logaritmes gebruik te maak.

2.1 Logaritmes en eksponente

Beskou onderstaande voorstelling.



Watter waarnemings en gevolgtrekkings kan gemaak word i.v.m. die eksponensiële bewerking en die logaritmiese bewerking?

Logaritmes is basies ‘n ander manier om dieselfde inligting te verstrek as wat deur ‘n eksponensiële vergelyking gegee word.

Om ‘n logaritme te definieer maak ons gebruik van die teorie van inverse funksies.

Beskou die grafiek hierbo. As $f(x) = 10^x$ dan mag ons skryf dat $y = 10^x$. Om die inverse funksie van $f(x) = 10^x$ te bepaal, maak ons x die onderwerp deur $x = \log_{10} y$ te definieer. Ons het die rolle van die afhanklike en onafhanklike veranderlikes omgeruil. Nou is $g(y) = \log_{10} y$. Aangesien x en y abstrakte veranderlikes is sonder enige fisiese betekenis, mag ons die simbole vir die veranderlikes omruil. Ons verkry dan $g(x) = \log_{10} x$ soos in die grafiek getoon, wat die spieëlbeeld van f om die lyn $h(x) = x$ is.

In die algemeen definieer ons: As $p = a^x$ met $a > 0$ en $a \neq 1$ dan $p > 0$ vir $x \in \mathbb{R}$ en $x = \log_a p$.

Voorbeelde:

$$8 = 2^3 \Leftrightarrow 3 = \log_2 8\,, \qquad 1000 = 10^3 \Leftrightarrow 3 = \log 1000\,, \qquad 0.008 = \frac{1}{125} = 5^{-3} \Leftrightarrow -3 = \log_5 0.008$$

Voltooi die ontbrekende inligting in die volgende tabel.

Eienskappe van logaritmes		
Eienskap	**Voorbeeld**	**Verklaring**
$\log_a 1 = ...$	$\log_3 1 = ...$	"$\log_3 1$" beteken: $3^{\text{WHAT}} = 1$
$\log_a a = ...$	$\log_e e = ...$	"$\log_7 7$" beteken: $7^{\text{WHAT}} = 7$
$\log_a \left(\frac{1}{a}\right) = ...$	$\log_5 \left(\frac{1}{25}\right) = ...$	"$\log_7 \frac{1}{343}$" beteken: $7^{\text{WHAT}} = \frac{1}{343} = \left(\frac{1}{7}\right)^3 = 7^{-3}$
$\log_a (xy) = ...$	$\log 8 + \log 125$ $= \log ....$ $= ....$	$a^x \times a^y = a^{..........}$
$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = ...$	$\log_5 500 - \log_5 20$ $= \log_5 ....$ $= ....$	$\frac{a^x}{a^y} = a^{..........}$
$\log_a (x^m) = ...$	$\log_5 625$ $= \log_5 5^4$ $= .... \times ....$ $= ....$	$(a^m)^x = a^{...........}$
$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ Vir enige $c > 0$	$\log_{32} 64$ $= \frac{\log_{.....} 64}{\log_{.....} 32}$ $= \overline{}$ $= ....$	$64 = 2^6$ $\therefore \log_2 64 = 6$ $32 = 2^5$ $\therefore \log_2 32 = 5$ $32^{\frac{6}{5}} = ...$
$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$	$\log_3 27 = \frac{1}{\log_{27} 3}$	$\log_3 27 = \frac{1}{\log_{27} 3}$ $= \frac{1}{\left(\frac{\log_{27} 3}{\log_{27} 27}\right)}$ $= \frac{\log_{27} 27}{\log_{27} 3}$
$a^{\log_a x} = ...$	$10^{\log_{10} p} = ...$	Die logaritme-bewerking is die .... van die .... bewerking

Eienskappe wat NIE geld by logaritmes nie		
Eienskap	**Voorbeeld**	**Korrekte vorm**
$\log_a\left(x \pm y\right) \neq \log_a x \pm \log_b y$	$\log_{10}\left(1000 \pm 100\right)$ $\neq \log_{10} 1000 \pm \log_{10} 100$	$\log_a\left(xy\right) = \log_a x + \log_a y$
$\log_a\left(xy\right) \neq \log_a x \times \log_b y$	$\log_{10}\left(1000\right) \neq \log_{10} 100 \times \log_{10} 10$	$\log_a\left(xy\right) = \log_a x + \log_a y$
$\log_a \frac{x}{y} \neq \frac{\log_a x}{\log_a y}$	$\log_3 \frac{81}{27} \neq \frac{\log_3 81}{\log_3 27}$	$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
$\left(\log_a x\right)^m \neq m \cdot \log_a x$	$\left(\log_5 25\right)^3 \neq 3 \cdot \log_5 25$	$\log_a\left(x^m\right) = m \cdot \log_a x$ of / *or* $\log_a x^m = m \cdot \log_a x$

Dit is belangrik om die implikasies van bogenoemde baie goed te begryp, aangesien ons dit by baie toepassings benodig.

Oefening 2.1

1. Vereenvoudig sonder ‘n sakrekenaar.

   1.1. $\log_{10} 20 + \log_{10} 50$

   1.2. $\log_6 36 + \log_6 \frac{1}{36} - 3\log_6 1$

   1.3. $\frac{\log 81 - \log 16}{\log 9 - \log 4}$

   1.4. $\log_4 4^{20} + (\log_4 4)^{20} - (\log_4 16) \cdot (\log_4 64)$

   1.5. $(\log_7 49)\log_7 1$

   1.6. $(\log 100) \cdot \log 1000$

   1.7. $3^{\log_3 x}$

   1.8. $\frac{\ln x + 2\ln x}{\ln x^3} - \ln(e^3) + (\ln e)^3 + \ln 1$ (Dit is die gebruik om $\log_e x$ te skryf as $\ln x$. Ons lees $\ln x$ as “lin ex”.)

2. Bepaal die waarde van die onbekende (Los op):

   2.1. $\log_3 x = 4$

   2.2. $\log x + \log(x+3) = 1$

   2.3. $\log(1-2x) - \log(x+2) = \log 1$

   2.4. $\ln x = \ln(2x-1) + 2\ln x$

2.2 Die oplos van ingewikkelder eksponensiële vergelykings d.m.v. logaritmes

Aangesien die definisie van 'n logaritme in terme van eksponente gedoen is, kan ons ingewikkelde eksponensiële vergelykings oorskryf na logaritmiese vorm. Sulke logaritmiese vergelykings is dan makliker om op te los as wat die oorspronklike eksponensiële vergelyking was.

Voorbeeld

1. Los op vir x : $\left(\frac{3}{10}\right)^{5x} = \frac{345}{64}$
2. Los op vir t : $3.5 \cdot 0.1^{3t} = 2.5^{t-1}$

Oplossing

1.
$$\left(\frac{3}{10}\right)^{5x} = \frac{343}{64}$$
$$\therefore 5x = \log_{\frac{3}{10}} \frac{343}{64}$$
$$\therefore 5x = \frac{\log\left(\frac{343}{64}\right)}{\log\left(\frac{3}{10}\right)}$$
$$\therefore x = \frac{\left[\frac{\log\left(\frac{343}{64}\right)}{\log\left(\frac{3}{10}\right)}\right]}{5}$$
$$= -0,279$$

2.
$$3,5 \cdot 0,1^{3t} = 2,5^{t-1}$$
$$\therefore \log\left(3,5 \cdot 0,1^{3t}\right) = \log\left(2,5^{t-1}\right)$$
$$\therefore \log(3,5) + \log\left(0,1^{3t}\right) = \log\left(2,5^{t-1}\right)$$
$$\therefore \log(3,5) + 3t \cdot \log(0,1) = (t-1) \cdot \log(2,5)$$
$$\therefore \log(3,5) + 3t \cdot \log(0,1) = t \cdot \log(2,5) - \log(2,5)$$
$$\therefore 3t \cdot \log(0,1) - t \cdot \log(2,5) = -\log(2,5) - \log(3,5)$$
$$\therefore t\left[3\log(0,1) - \log(2,5)\right] = -\log(2,5) - \log(3,5)$$
$$\therefore t = \frac{-\log(2,5) - \log(3,5)}{3\log(0,1) - \log(2,5)}$$
$$= 0,277$$

Oefening 2.2

1. Los die volgende vergelykings op.

   1.1. $0.00293 = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{t}$

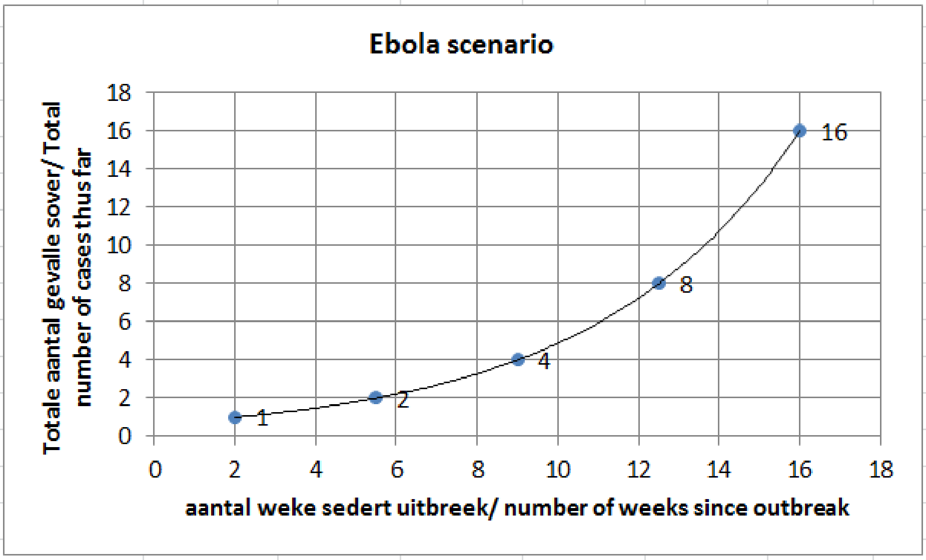
   1.2. $\frac{1}{3}\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} = 2.497180$

   1.3. $4 \cdot 2^{3t} = \frac{1}{2} \cdot 5^{2t-1}$

   1.4. $2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2n} - \frac{1}{2} \cdot 5^{1-3n} = 0$

2. Die Wêreldgesondheidsorganisasie het in November 2014 gemeen dat die totale aantal Ebola-gevalle elke drie tot vier weke verdubbel. 25% tot 90% van die gevalle sterf en toe daar 10 000 gevalle in totaal was, was 5000 van hulle reeds oorlede:

	31 Des 2013					31 Okt 2014
Tyd (weke)	2	5.5	9	12.5	16	46
Totale aantal gevalle	1	2	4	8	16	10000



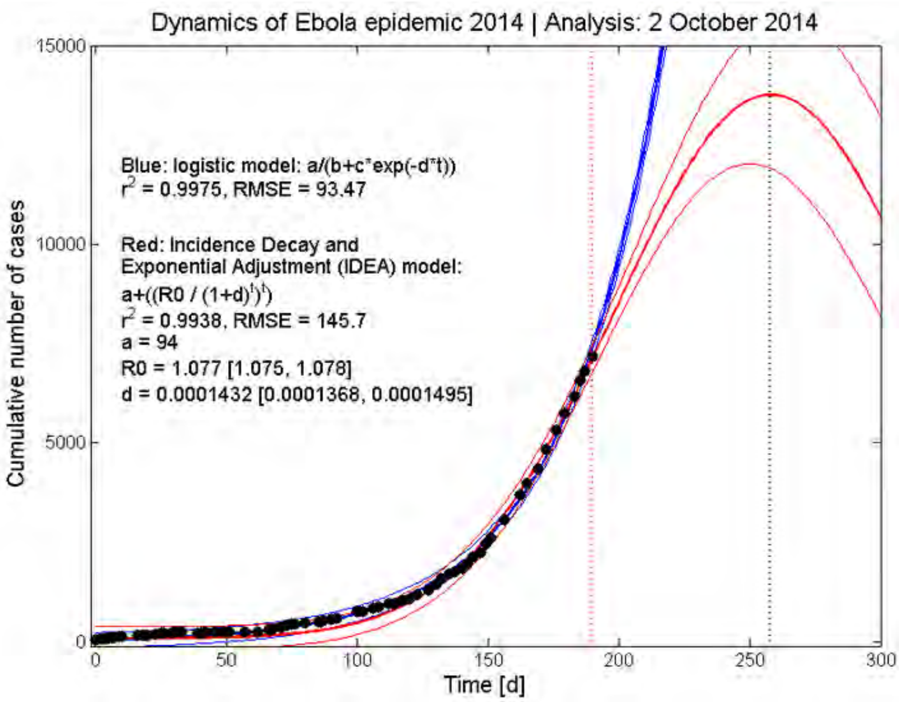
2.1. Bewys dat die totale aantal gevalle nie kwadraties toeneem nie. Lê die punte in die gegewe grafiek op 'n parabool?

2.2. Wiskundig beskou ons die eksponensiële groei-funksie as die funksie $P(t) = Ae^{kt}$. Aanvaar dat hierdie funksie die vergelyking van die grafiek hierbo is. Bereken die waarde van A en k.

2.3. Gebruik die laaste punt in die tabel hierbo en bepaal of u antwoorde in 2.2. korrek is. Met hoeveel persent verskil u voorspelde waarde vir P met die waarde in die tabel?

2.4. Bepaal die maand en jaar wanneer die waarde van P teoreties 7 miljard (10^9) (huidige wêreldbevolking) sou wees.

Opmerking: Die verspreiding van die virus is gelukkig teen die einde van 2014 skynbaar onder beheer gebring. Teen 7 Januarie was daar 20 747 totale gevalle waarvan 8 235 oorlede is. Hieronder is 'n baie meer verfynde model vir die verloop van die siekte. (Bron:
http://motherboard.vice.com/read/this-math-model-is-predicting-the-ebola-outbreak-with-incredible-accuracy



3. Die half-leeftyd van 'n sekere isotoop van die chemiese element Polonium is 138.376 dae (dit neem dus vir 'n sekere massa van $^{210}_{84}Po$ presies 138.376 dae voordat die helfte daarvan in die lood-isotoop $^{206}_{82}Pb$ verander het). Die vergelyking vir m, die massa $^{210}_{84}Po$ in kg op enige tydstip t (in dae) word gegee deur die vergelyking $m = m_0 e^{-kt}$ waar m_0 die aanvanklike massa Polonium is. Die konstante k word die vervalkonstante genoem.

   3.1. Bereken die waarde van k.

   3.2. Die gemiddelde leeftyd van $^{210}_{84}Po$ word in die literatuur aangedui as 200 dae. As die gemiddelde leeftyd van 'n isotoop gedefinieer word as die resiprook van die vervalkonstante, toets of u antwoord in 3.1 korrek is.

   3.3. Bereken hoeveel van 'n 3 kg monster $^{210}_{84}Po$ na presies 2 jaar in $^{206}_{82}Pb$ verval het.

   3.4. Bereken die aantal dae wat 'n 2 kg monster $^{210}_{84}Po$ sal neem om in 1.75 kg $^{206}_{82}Pb$ te verval.

3 Inleiding tot funksies

Leerdoelstellings vir hierdie leereenheid

Na afhandeling van hierdie leereenheid moet die student in staat wees om die volgende te doen:

1. Die formele definisie van 'n funksie as 'n spesiale relasie kan toepas.
2. Die definisie- en waardeversameling van 'n funksie kan identifiseer.
3. Die inverse van 'n gegewe funksie kan bepaal.
4. Bewerkings met funksies kan uitvoer.

3.1 Definisie van 'n funksie

Relasies

In Wiskunde dui 'n relasie op twee versamelings (groepe getalwaardes), waartussen daar 'n verband bestaan. Vir elke element uit die een versameling kan 'n verbinding gemaak word met een of meer elemente van die ander versameling Hierdie verband is een of ander patroon of **reël**.

Hierdie reël kan 'n woordelikse instruksie wees, of 'n algebraïese formule, of 'n tabel met waardes, of 'n grafiek.

Voorbeeld van 'n relasie: Voltooi die patroon $\left(getal; \pm\sqrt{getal}\right)$ vir die getalle $\{0;4;9;16;25\}$.

$$\{(0;\ldots\ldots);\ (4;\ldots\ldots);(9;\ \pm 3);(16;\ldots\ldots);(25;\ldots\ldots)\}$$

Let daarop dat elke eerste element met twee ander elemente verbind word.

Funksies

'n Funksie is **'n reël** wat elke element van een versameling (die definisieversameling) **verbind** met **een en slegs een element** van 'n ander versameling (die waardeversameling).

Voorbeeld van 'n funksie: Voltooi die patroon $\left(getal; getal^2\right)$ vir die getalle $\{-2;-1;0;1;2\}$.

Let daarop dat elke eerste element met slegs een ander elemente verbind word. Ons noem dit 'n **eenduidige verband.**

3.2 Definisie- en waardeversameling

Die **definisieversameling** is die versameling onafhanklike elemente. Die **waardeversameling** is die versameling afhanklike elemente wat afhang van die elemente in die definisieversameling.

Een-eenduidige funksies

'n Een-eenduidige funksie het die eienskap dat elke element uit die definisieversameling op 'n unieke, verskillende element van die waardeversameling afgebeeld word.

Voorbeeld van 'n een-eenduidige funksie: Voltooi die patroon $\left(getal;\ getal^3\right)$ vir die getalle $\{-2;-1;0;1;2\}$.

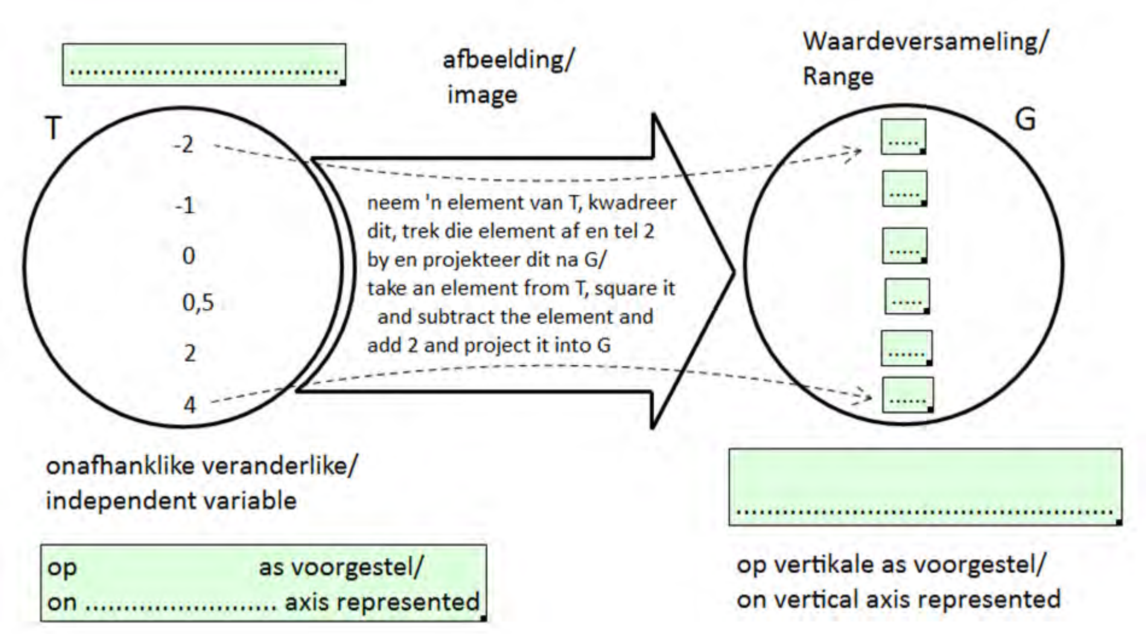
$$\{(-2;\ldots\ldots);\ (-1;\ldots\ldots);(0;\ \ldots\ldots);(1;\ldots\ldots);(2;\ldots\ldots)\}$$

Nie een-een-duidige funksies

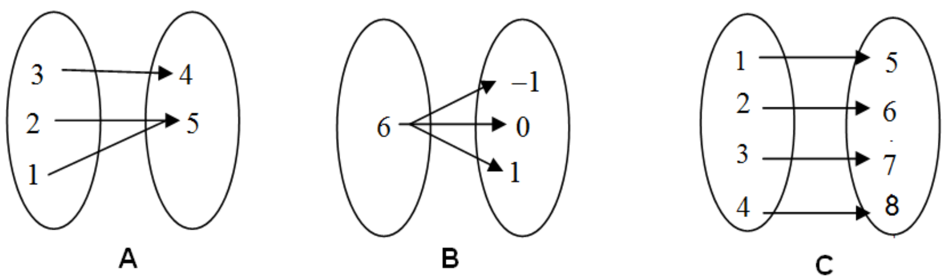
'n Nie een-eenduidige funksie het die eienskap dat elke element uit die definisieversameling nie op 'n unieke, verskillende element van die waardeversameling afgebeeld word nie. U sien dit duidelik by die voorbeeld hierbo oor die kwadrate. Verskillende getalle lewer dieselfde kwadrate.

Oefening 3.1

1. Beskou onderstaande skematiese voorstelling van 'n funksie en vul al die ontbrekende begrippe in.



2. Stel die inligting in die skematiese voorstelling op ʼn assestelsel voor.
3. Doen **interpolasie** (trek 'n gladde kromme deur die punte wat u geteken het tussen en insluitende waar $t = -2$ en $t = 4$).
4. Gebruik die gegewe inligting en skryf die vergelyking (formule) van die grafiek neer. Wenk: op skool sou dit iets gewees het soos $y = ax^2 + bx + c$.
5. Beskryf die vorm van die kromme: stygend/dalend, konkawiteit, minimum- en/of maksimum draaipunt(e).
6. Skryf die definisieversameling T van die funksie in versamelingsnotasie neer.
7. Skryf die waardeversameling G van die funksie in versamelingsnotasie neer.
8. Doen nou **ekstrapolasie** (verleng die kromme "verby" die punte waar $t = -2$ en $t = 4$.)
9. Gebruik stap 4 hierbo en bereken die waardes van $g(-1.5)$, $g\left(\frac{3}{2}\right)$, $g(5)$ en $g(2 + h)$.
10. Dui op die grafiek aan waar u die eerste drie antwoorde op vraag 9 sou aflees.
11. Gebruik stap 4 hierbo en bereken die waardes van t sodat $g(t) = 7$.
12. Dui op die grafiek aan waar u die antwoorde op vraag 11 sou aflees.
13. Beskou die voorstelling.



13.1. Watter van die gegewe gevalle stel funksies voor?

13.2. Watter van die funksies hierbo is een-tot-een-funksies?

14. As $\mathrm{A}=\{-1;0;1;2;3\}$ en $\mathrm{B}=\{-3;-2;-1;0;1;2;3;...;9;10\}$, skryf die volgende funksies as versameling getallepare.

14.1. $\{(x;y)|y=x; x\in \mathrm{A}, y\in \mathrm{B}\}$

14.2. $\{(x;y)|y=x^2; x\in \mathrm{A}, y\in \mathrm{B}\}$

15. Sê of elkeen van die funksies by Vraag 14 **een-tot-een-funksies** of **nie een-tot-een-funksies** is.

16. Skets rofweg elkeen van die volgende funksies en skryf die funksie se definisieversameling en waardeversameling neer.

16.1. $\{(x;y)|y=(x-1)^2-4; x\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R}\}$

16.2. $\{(t;y)|y=-(t-2)^2+2; t\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R}\}$

16.3. $\left\{(z;y)|y=-\frac{8}{z+1}+1; x\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R}\right\}$

16.4. $\{(p;r)|r=\sqrt{p-2}; r\in\mathbb{R}, p\in\mathbb{R}\}$

16.5. $\{(x;y)|y=e^x; x\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R}\}$

16.6. $\{(x;y)|y=\ln x; x\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R}\}$

Funksiewaardes

Funksiewaardes is die afhanklike veranderlike-waardes wat op die vertikale as afgelees word. Dit word bereken deur bepaalde waardes van die onafhanklike veranderlike in die funksie se definieërende vergelyking te vervang.

Oefening 3.2

1. As $s(t)=3$ bepaal $s(0), s(1), s(t+h)$.

2. As $T_n=\frac{7}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ bepaal T_1en T_4.

3. As $g(y)=\frac{3}{2y}$ bepaal $g(0)$, $g(t)$ en $g\left(\frac{2}{3}\right)$.

3.3 Inverse van ’n funksie

Inverse funksie

Voorbeeld

As $y=\sin x$ en $x=\frac{\pi}{6}$ dan is $y=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$ wat $y=\frac{1}{2}$ lewer.

Gestel egter dat ons weet dat $y=\frac{1}{2}$ in $y=\sin x$ maar ons wil vir x bepaal. Dan gaan ons soos volg te werk.

$\frac{1}{2}=\sin x$ so $x=\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ en dit lewer onder meer $x=\frac{\pi}{6}$ as oplossing.

Bogenoemde illustreer die gebruik van ‘n inverse funksie of inverse funksie-bewerking.

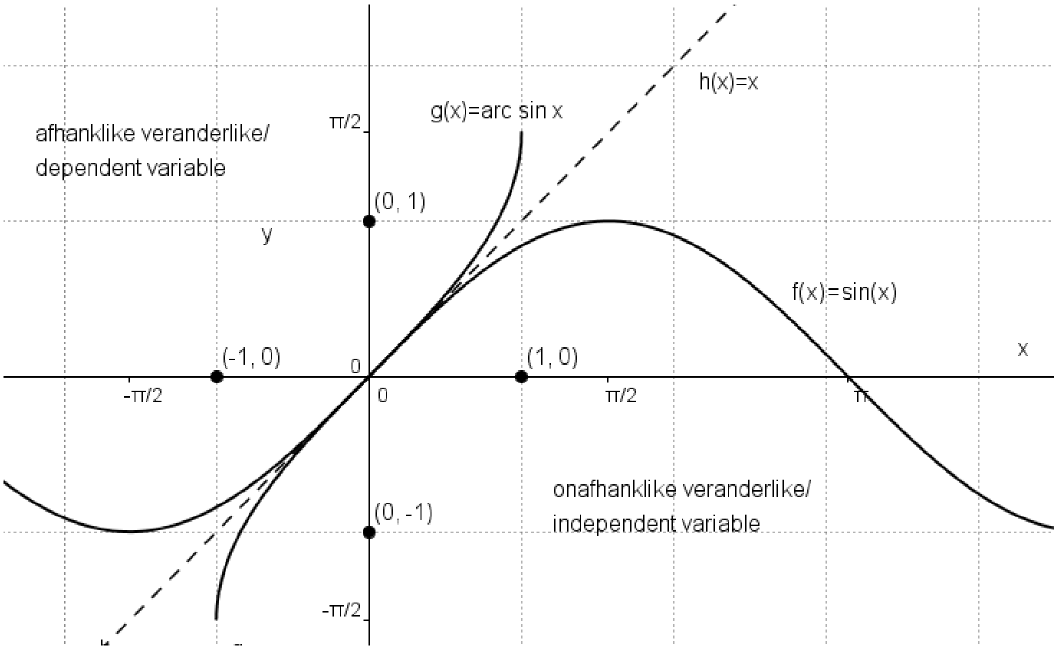
Berekening van inverse funksies

In gees en wese kom die berekening van die inverse van ‘n funksie daarop neer dat...

- ons die rolle van die afhanklike en onafhanklike veranderlikes in die definiërende vergelyking omruil en
- dat ons die vertikale as-veranderlike (afhanklike veranderlike) die onderwerp van die vergelyking maak.

Daar is nietemin ‘n komplikasie by die berekening van inverse funksies, naamlik dat slegs een-eenduidige funksies inverses besit. Die inverse van ‘n nie een-eenduidige funksie is ‘n relasie.

Beskou bv. die sinus-funksie f en sy inverse f^{-1} wat in die grafiek hieronder aangedui word deur g.



Opmerking:

Let daarop dat ons in Leergedeelte 2.1 ‘n soortgelyke argument gevoer het om die idee van ‘n logaritmiese funksie as inverse van ‘n eksponensiële funksie in te voer.

Daar is egter sekere interessante aspekte omtrent die sinus-funksie (en ook die cosinus-funksie) wat ons noodsaak om ons diepere kennis van funksies te gebruik wanneer ons die inverse van sekere funksies bereken.

Die implikasie van een-eenduidigheid wanneer die inverse van funksies bepaal word

Dit is duidelik dat slegs die gedeelte van die sinus-kromme tussen die punte waar hy horisontaal loop (by sy draaipunte), ‘n spieëlbeeld in die lyn $y = x$ het.

Onthou dat ‘n funksie $y = f^{-1}(x)$ per definisie een en slegs een y-waarde besit vir elke x-waarde. Dit beteken meetkundig dat ‘n vertikale lyn wat oor die kromme van f^{-1} skuif, die kromme by elke x-waarde slegs een keer mag sny.

Maar die inverse funksie f^{-1} is uit f verkry deur die afhanklike veranderlike en die onafhanklike veranderlike se rolle te ruil. Effektief het ons dus die asse geruil. Dit impliseer dat ‘n horisontale lyn wat oor f skuif, dit by elke y-waarde slegs een keer mag sny. Slegs daardie deel van f se waardeversameling waarop hy die horisontale lyntoets slaag, sal die definisieversameling van f^{-1} vorm.

(Onthou dat f^{-1} in hierdie konteks NIE $\frac{1}{f}$ beteken nie.)

Oefening 3.3

Bepaal die inverse van die volgende funksies en skets f sowel as f^{-1}. Gee ook die definisie- en waardeversamelings van elke funksie asook van sy inverse.

1. $f(x) = 2x + 1$
2. $g(x) = \sqrt{x - 1}$

3.4 Bewerkings met funksies

Kombinasies van funksies (bewerkings)

Aangesien funksiewaardes getalle is, tree funksies soos getalle op waarmee ons bewerkings kan doen.

Die komplikasie, natuurlik, is die definisieversameling van die resultaat van die bewerking – **in die algemeen is die definisieversameling van die resultaat die snyding van die definisieversamelings van die afsonderlike funksies** – in die geval van deling (kwosiënte) **is die waardes van die onafhanklike veranderlike waarvoor die noemerfunksie nul is**, ook uitgesluit.

Let op die volgende notasie.

- Som van funksies: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
- Verskil van funksies: $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$
- Produk van funksies: $(fg)(x) = f(x)g(x)$
- Kwosiënt van funksies: $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $g(x) \neq 0$.

Oefening 3.4

1. As $f(x) = 2x^2$ en $g(x) = 3x + 5$, bepaal die volgende.

   1.1. $(f+g)(x)$

   1.2. $(g+f)(x)$

   1.3. $(f-g)(x)$

   1.4. $(g-f)(x)$

   1.5. $(fg)(x)$

   1.6. $(gf)(x)$

   1.7. $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

   1.8. $\left(\frac{g}{f}\right)(x)$

2. Watter van die bewerkings in hierbo is kommutatief?

3. As $f(x) = 2x^2$, $a = 3$ en $x = 2$ bepaal die volgende.

   3.1. $a[f(x)]$

   3.2. $f(ax)$

   3.3. Watter gevolgtrekking kan u maak oor 3.1 en 3.2?

4. As $g(x) = 2x^2$, $a = 9$ en $x = 16$, bepaal die volgende.

   4.1. $g(a+x)$

   4.2. $g(a) + g(x)$

   4.3. Watter gevolgtrekking kan u maak oor 4.1 en 4.2?

5. As $p(x) = \sin x$ en $a = 4$, skets op 'n grafiese sakrekenaar of met behulp van grafiese sagteware die volgende drie krommes op dieselfde assestelsel.

$$y = p(x), \qquad y = ap(x), \qquad y = p(ax)$$

3.5 Saamgestelde funksies

‘n Saamgestelde funksie kan beskou word as ‘n funksie binne-in ‘n ander funksie. Soms word daar van “geneste funksies” gepraat. Wanneer so ‘n funksie se waarde bepaal word, werk ons van binne na buite.

Voorbeeld 1

Die volume van ‘n sferiese ballon word gegee deur die formule $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$. Die radius van die ballon verander egter met tyd volgens die formule $r(t) = -t^2 + 6t$ met $0 \leq t \leq 3$ waar radius in cm gemeet word en tyd in sekondes. Ons wil die volume bereken op die oomblik wanneer $t = \frac{3}{2}$. Nou kan ons die volume skryf as

$$(V \circ r)(t) = V\big(r(t)\big) = V\left(-t^2 + 6t\right) = \underbrace{\frac{4}{3}\pi\Big(\underbrace{-t^2 + 6t}_{r(t)}\Big)^3}_{V(r)}$$

Ons kan die uitdrukking regs probeer vereenvoudig deur die hakies uit te vermenigvuldig totdat ons die volume as ’n veeltermfunksie $V(t)$ het. Daarna kan ons die waarde van $t = \frac{3}{2}$ in vervang om $V\left(\frac{3}{2}\right)$ te verkry. Dit sou egter ‘n groot klomp rekenwerk afgee.

Die teorie van saamgestelde funksies laat ons toe om eerder soos volg te werk te gaan. Bereken $r\left(\frac{3}{2}\right)$ en vervang die antwoord in die formule $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$; dan verkry ons ook die waarde van V as $t = \frac{3}{2}$.

Voltooi: $r\left(\frac{3}{2}\right) = \cdots, V(\ldots) = \frac{4}{3}\pi(\ldots)^3 = \cdots$.

Wat is die definisieversameling van r?

Wat is die waardeversameling van r?

Wat is die definisieversameling van V?

Wat is die waardeversameling van V?

Voorbeeld 2

Gegee $S(r) = 4\pi r^2$ en $r(t) = t^2 + 5t + 5$ met $0 \leq t \leq 10$.

Voltooi: $(S \circ r)(t) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \underbrace{4\pi\Big(\underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}_{r(t)}\Big)^2}_{S(r)}$

$r(6) = \cdots, S(\ldots) = 4\pi(\ldots)^2 = \cdots$.

Wat is die definisieversameling van r?

Wat is die waardeversameling van r?

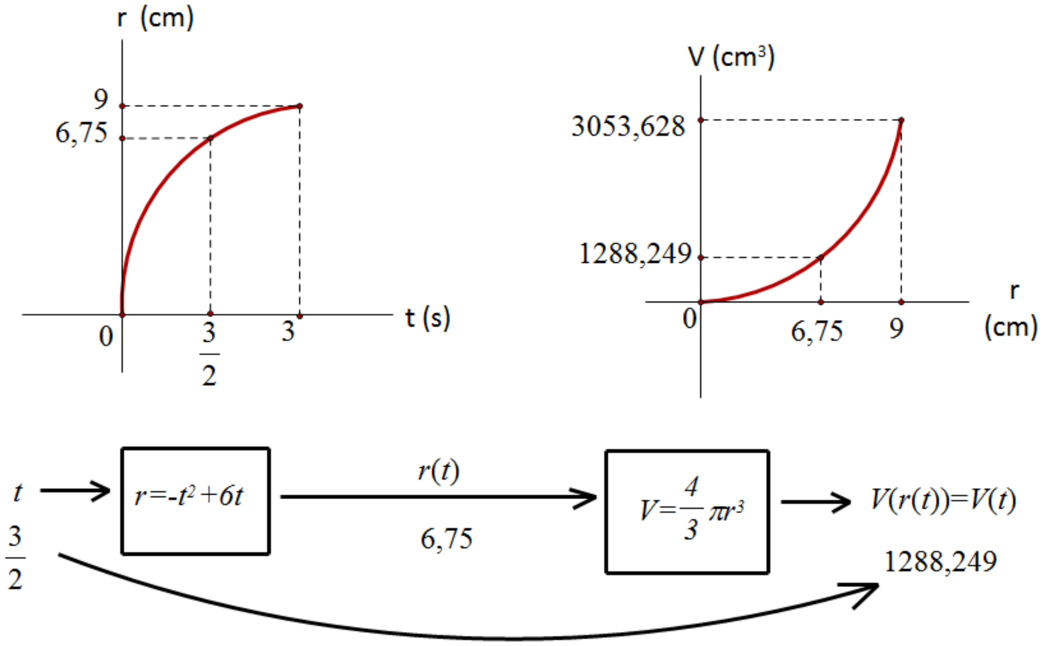
Wat is die definisieversameling van S?

Wat is die waardeversameling van S?

Definisie van ’n saamgestelde funksie

As f en g funksies is van x, dan is die saamgestelde funksie $(f \circ g)(x)$ die geneste funksie $f\big(g(x)\big)$ vir alle x in die definisieversameling van g sodat $g(x)$ die definisieversameling van f vorm. \

Skematies kan ons die voorbeeld oor die ballon (Voorbeeld 1 hierbo) soos volg voorstel.



By die **kettingreël vir differensiasie** wat u later vanjaar volledig behandel, sal u in staat moet wees om ‘n saamgestelde funksie se binneste en buitenste deel te identifiseer.

Voorbeeld 1

As $f(x) = x^2$ en $g(x) = \sqrt{x+2}$ dan $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = \big(\sqrt{x+2}\big)^2 = x + 2$ en $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = \sqrt{(x^2) + 2} = \sqrt{x^2+2}$.

Voorbeeld 2

Ontbind $f(x) = \cos(x^2 - x + 1)$ in die funksies $u(x)$ en $v(x)$.

Neem $u(x) = \cos x$ en $v(x) = x^2 - x + 1$. Dan $f(x) = u\big(v(x)\big) = (u \circ v)(x)$.

Oefening 3.5

1. As $v(t) = \sqrt[3]{t}$ en $u(t) = \sin t$, bepaal die volgende.

   1.1. $(v \circ u)(t)$

   1.2. $(u \circ v)(t)$

2. As $v(t) = \frac{2}{1+t}$ en $u(t) = \frac{3}{1-t}$, bepaal die volgende.

   2.1. $(v \circ u)(t)$

   2.2. $(u \circ v)(t)$

4 Radiaalmaat en trigonometrie

Leerdoelstellings vir hierdie leereenheid

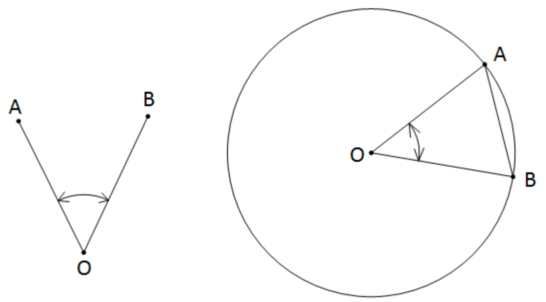
Na afhandeling van hierdie leereenheid moet die student in staat wees om die volgende te doen:

1. Radiaalmaat te definieer en hoeke van grade na radiale om te skakel en andersom.
2. Booglengte te bereken.
3. Oppervlakte van ‘n sirkelsektor te bereken.
4. Al ses trigonometriese verhoudings te definieer en hul funksiewaardes in al vier kwadrante van die platvlak te bereken.
5. Die som- en verskilformules toe te pas.
6. Die dubbelhoekformules toe te pas.
7. Trigonometriese identiteite te bewys.

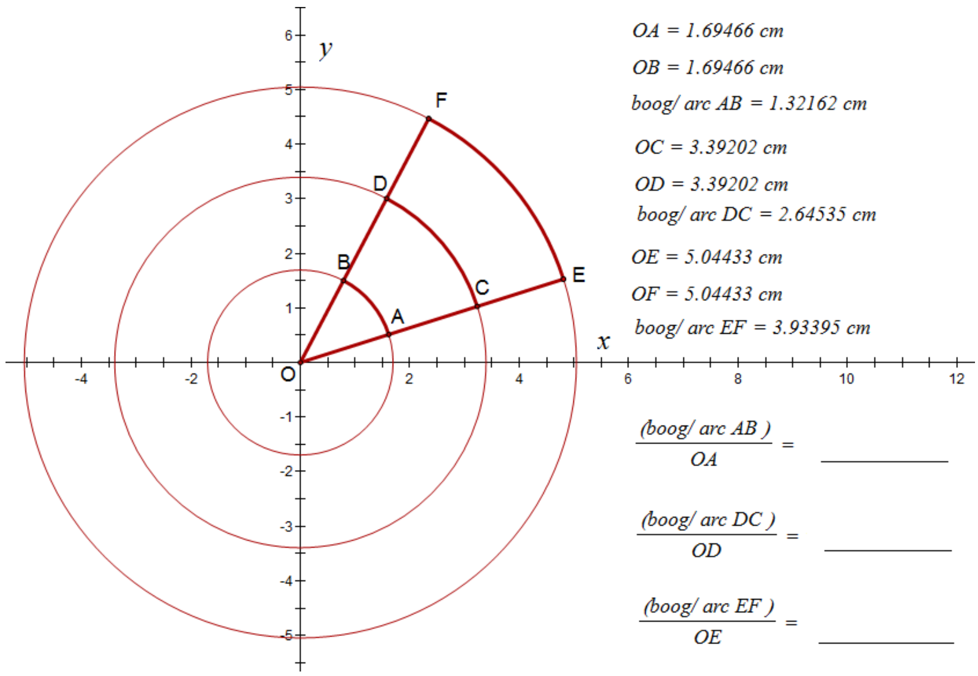
4.1 Radiaalmaat

Die verdeling van ‘n sirkel in 360 gelyke dele wat ons grade noem, asook die onderverdeling van ‘n graad in 60 gelyke dele wat ons minute noem, is ‘n antieke gebruik wat by die Babiloniese en Sumeriese geleerdes van voor 540 vC oorgeneem is.

Probeer gerus met behulp van die volgende sketse verduidelik wat ons bedoel met die begrip “hoek”.



Vir moderne Wiskunde en wetenskap vereis ons ‘n formele definisie vir die begrip **hoek**. Beskou onderstaande skets waarop akkurate metings aangetoon word. Bereken die verhouding booglengte tot radius vir al drie sektore.



$OA = 1.69466$ cm

$OB = 1.69466$ cm

boog/ arc $AB = 1.32162$ cm

$OC = 3.39202$ cm

$OD = 3.39202$ cm

boog/ arc $DC = 2.64535$ cm

$OE = 5.04433$ cm

$OF = 5.04433$ cm

boog/ arc $EF = 3.93395$ cm

$$\frac{(\text{boog/ arc } AB)}{OA} = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$\frac{(\text{boog/ arc } DC)}{OD} = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$\frac{(\text{boog/ arc } EF)}{OE} = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

Die verhouding booglentge tot radius bly konstant in al drie gevalle, ongeag die grootte van die oppervlakte van die gebied tussen die lyne en/of boë wat die sektore omsluit. Daarom is dit nuttig om die hoek tussen enige twee radiusse voortaan eenvoudig te definieer as

$$\theta = \frac{\text{booglengte}}{\text{radius}} = \frac{a}{r}.$$

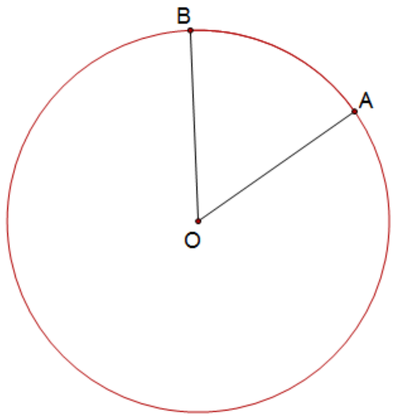
Let daarop dat die hoek θ geen eenheid besit nie. Hoekom nie? Ons verwys na hoekgroottes wat op hierdie wyse bereken word, as **radiale.**

Hoe groot is ‘n radiaal en hoeveel radiale pas in ‘n volsirkel, wat ons tradisioneel beskou as die boog van een omwenteling (360°)?

Beskou die volgende skets en voltooi die ontbrekende inligting.

boog/ arc AB = 3.206 cm

radius = 3.206 cm



$$\frac{\text{boog/ arc AB}}{\text{radius}} = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

U kan sien dat ‘n hoek van 1 radiaal ‘n groot hoek is. Skat gerus hoe groot die hoek hierbo in grade sou wees. Laat ons nou ‘n metode ontwikkel om radiale in grade om te skakel.

Beskou ‘n sirkel met radius r en sirkelboog a waar die sirkelboog die hele omtrek van die sirkel is. In hierdie geval is die hoek wat deur die boog (dit is die omtrek) onderspan word, een omwenteling. Dit is 360° volgens ons tradisionele hoekmaat.

Voltooi nou die redenasie.

$$\text{Een omwent}\left(^\circ\right) = 1\ \text{Omwent}\left(\text{radiale}\right)$$

$$\therefore 360^\circ = \frac{booglengte\,(volsirkel)}{radius} \quad \left(\text{per def.}\right)$$

$$\therefore 360^\circ = \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{r} \quad \text{(omtrek=?)}$$

$$\therefore 360^\circ = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \text{radiale}$$

$$\therefore 1^\circ = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \text{radiale}$$

$$1\ \text{radiaal} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots^\circ$$

Dit is nou maklik om te sien dat ons ‘n hoek van π radiale as ‘n hoek van $180°$ kan beskou.

Voorbeelde

1. Skakel 240° om na radiale.
2. Skakel 315° om na radiale.
3. Skakel $\frac{3}{4}\pi$ radiale om na grade.
4. Skakel $\frac{11}{6}\pi$ radiale om na grade.

Oplossing

1. $$\begin{aligned} 240^\circ &= 180^\circ + 60^\circ \\ &= \pi\ rad + \frac{1}{3}\pi\ rad \\ &= \frac{3}{3}\pi\ rad + \frac{1}{3}\pi\ rad \\ &= \frac{4}{3}\pi\ rad \end{aligned}$$

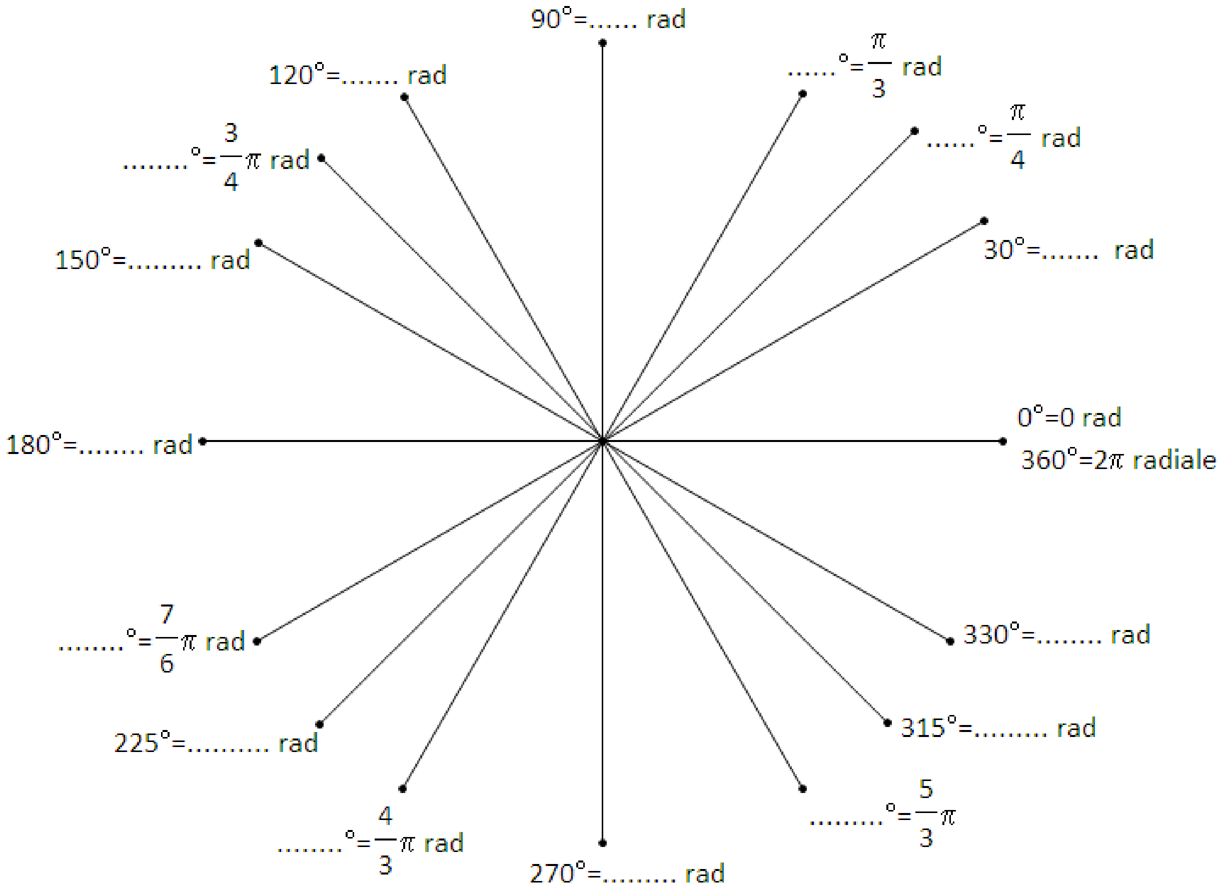
2. $$\begin{aligned} 315^\circ &= 360^\circ - 45^\circ \\ &= 2\pi\ rad - \frac{1}{4}\pi\ rad \\ &= \frac{8}{4}\pi\ rad - \frac{1}{4}\pi\ rad \\ &= \frac{7}{4}\pi\ rad \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} \frac{3}{4}\pi\ rad &= \frac{3}{4}\times 180^\circ \\ &= 135^\circ \end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned} \frac{11}{6}\pi\ rad &= \frac{11}{6}\times 180^\circ \\ &= 330^\circ \end{aligned}$$

Oefening 4.1

Voltooi die ontbrekende inligting in die onderstaande skets.



4.2 Berekening van booglengte

Los die volgende probleme op deur van die definisie van hoekgrootte in radiale gebruik te maak. Waar hoekgroottes in grade gegee is, skakel dit eers om na radiale voordat jy die berekeninge doen. Indien die antwoord 'n hoekgrootte is, skakel dit om van radiale na grade.

Oefening 4.2

1. ‘n Speelgoedtrein ry in ‘n sirkelbaan met ‘n oppervlakte van $25\,446.900$ cm^2. Indien dit 2.5 m aflê tussen twee punte op die spoor, wat is die hoek in grade waardeur die treintjie gery het?
2. Gestel ‘n sirkelsektor het ‘n radius van x en ‘n middelpuntshoek van 2 radiale. Bereken die lengte van die boog van die sektor.
3. Bepaal die oppervlakte van ‘n sirkel indien ‘n booglengte van 200 mm onderspan word deur ‘n hoek van $171.887339°$.

4.3 Berekening van die oppervlakte van ’n sirkelsektor

Beskou die volgende tabel en kyk of u die patroon kan raaksien.

Figuur	Oppervlakte-Formule	Hoek in rad
Volsirkel	$A = \pi r^2$	2π
Halfsirkel	$A = ...\pi r^2$	π
Kwartsirkel	$A = ...\pi r^2$	....
Agstesirkel	$A = \frac{1}{8}\pi r^2$	$\frac{\pi}{4}$
n^{de} van ‘n sirkel	$A = ...\pi r^2$	....

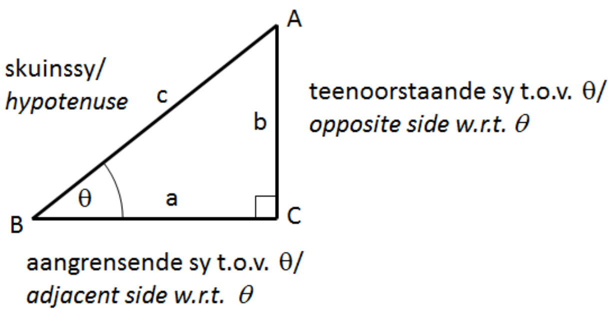
Voltooi: Indien ‘n sirkelsektor ‘n hoek van θ radiale by die middelpunt maak, is die formule vir die oppervlakte van die sektor $A_{\text{sirkelsektor}} = \cdots$.

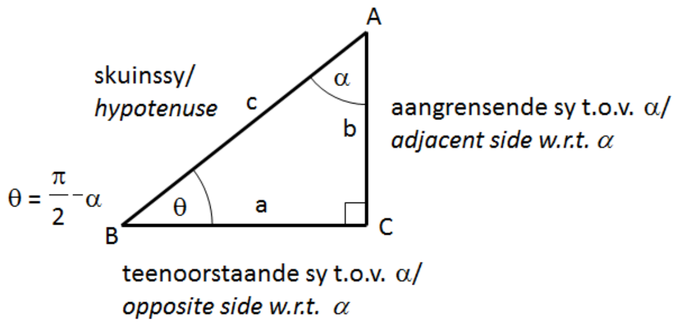
Oefening 4.3

1. Die straal van ‘n waterspreier beweeg deur ‘n hoek van $50°$ en die straal kan 5 m ver bykom. Bereken die oppervlakte wat dit kan natlei.
2. Gestel die hoek θ waardeur die straal beweeg, verdubbel maar die radius van die straal halveer. Met watter persentasie sal die oppervlakte wat besproei kan word, dan verander?
3. Gestel die hoek θ waardeur die straal beweeg, halveer maar die radius van die straal verdubbel. Met watter persentasie sal die oppervlakte wat besproei kan word, dan verander? Is dit ‘n toename of afname?
4. Bepaal die radius van ‘n sirkel waarvan die oppervlakte van ’n agtste van die sirkel 19.2422555 m^2 is.

4.4 Die ses trigonometriese verhoudings en hul funksiewaardes in al vier kwadrante van die platvlak

Beskou die reghoekige driehoeke.





Aangesien daar ses verskillende maniere bestaan om die teenoorstaande sy, aangrensende sy en skuinssy van ‘n reghoekige driehoek as verhoudings van mekaar te skryf, geld nie net die volgende drie verhoudings

$$\sin\theta = \frac{b}{c} \qquad \text{en/and} \qquad \sin\alpha = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$$

$$\cos\theta = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} \qquad \text{en/and} \qquad \cos\alpha = \frac{\dots\dots\dots}{c}$$

$$\tan\theta = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} \qquad \text{en/and} \qquad \tan\alpha = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$$

nie, maar ook die volgende verhoudings

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{c}{b} \qquad \text{en/and} \qquad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} \qquad \text{en/and} \qquad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$$

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} \qquad \text{en/and} \qquad \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$$

Die verhoudings in die tweede groep hierbo staan as **resiprookverhoudings of omgekeerde verhoudings van die sinus-, cosinus- en tangensverhoudings** bekend. **(NIE INVERSE VERHOUDINGS NIE)**

Dit kan maklik aangetoon word dat $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ deur van die eerste skets gebruik te maak.

$$\text{LK} = \tan\theta = \frac{b}{a}$$

$$\text{RK} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{b/c}{a/c} = \frac{b}{c} \times \frac{c}{a} = \frac{b}{a}$$

Dus $\text{LK} = \text{RK}$ en $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$.

Maak nou van die tweede skets gebruik en bewys self dat $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$.

Die tweede skets gee ook aan ons ‘n manier om die **ko-verhoudings van die ses trigonometriese verhoudings** verkry. Voltooi die volgende.

$\sin\alpha = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$ en $\cos\theta = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$ dus ……………. = …………….. . Maar, aangesien $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, kan ons skryf

$$\sin \dots = \cos(\dots\dots\dots).$$

$\cos\alpha = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$ en $\sin\theta = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$ dus ……………. = …………….. . Maar, aangesien $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, kan ons skryf

$$\cos \dots = \sin(\dots\dots\dots).$$

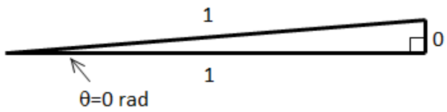
$\tan\alpha = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$ en $\cot\theta = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$ dus ……………. = …………….. . Maar, aangesien $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, kan ons skryf

$$\tan \dots = \cot(\dots\dots\dots).$$

$\sec\alpha = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$ en $\operatorname{cosec}\theta = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$ dus ……………. = …………….. . Maar, aangesien $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, kan ons skryf

$$\sec \dots = \operatorname{cosec}(\dots\dots\dots).$$

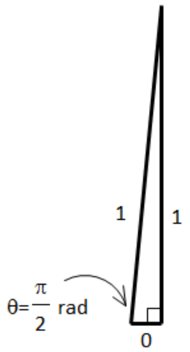
Dit is ook aan u bekend dat die trigonometriese funksiewaardes vir **sekere bekende hoeke**, nl. $0°$, $30°$, $45°$, $60°$ en $90°$ baie maklik uit die volgende sketse bepaal en ook maklik gememoriseer kan word; Ons pas onderstaande sketse vir radiaalmaat aan.



$\sin 0=$ $\quad$ $\text{cosec } 0=$

$\cos 0=$ $\quad$ $\sec 0=$

$\tan 0=$ $\quad$ $\cot 0=$

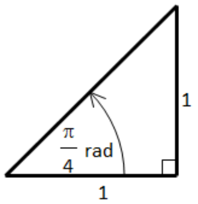


$\sin \frac{\pi}{2}=$ $\quad$ $\text{cosec } \frac{\pi}{2}=$

$\cos \frac{\pi}{2}=$ $\quad$ $\sec \frac{\pi}{2}=$

$\tan \frac{\pi}{2}=$ $\quad$ $\cot \frac{\pi}{2}=$

Let op dat die driehoeke hierbo nie regtig bestaan nie. Ons gebruik verbeelding om te bepaal wat met die driehoek gebeur indien die sy en die skuinssy van die driehoek op mekaar val.



$\sin \frac{\pi}{4}=$ $\quad$ $\text{cosec } \frac{\pi}{4}=$

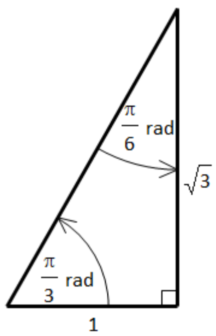
$\cos \frac{\pi}{4}=$ $\quad$ $\sec \frac{\pi}{4}=$

$\tan \frac{\pi}{4}=$ $\quad$ $\cot \frac{\pi}{4}=$

$\sin \frac{\pi}{3}=$ $\quad$ $\text{cosec } \frac{\pi}{3}=$

$\cos \frac{\pi}{3}=$ $\quad$ $\sec \frac{\pi}{3}=$

$\tan \frac{\pi}{3}=$ $\quad$ $\cot \frac{\pi}{3}=$

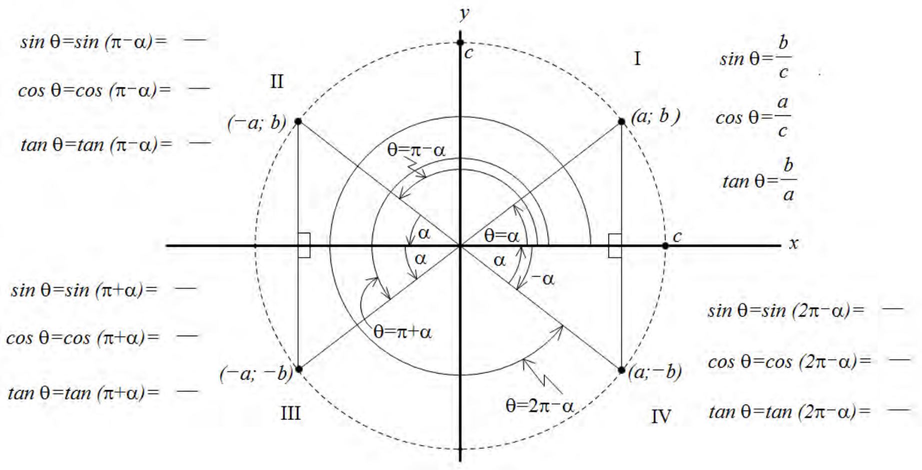


$\sin \frac{\pi}{6}=$ $\quad$ $\text{cosec } \frac{\pi}{6}=$

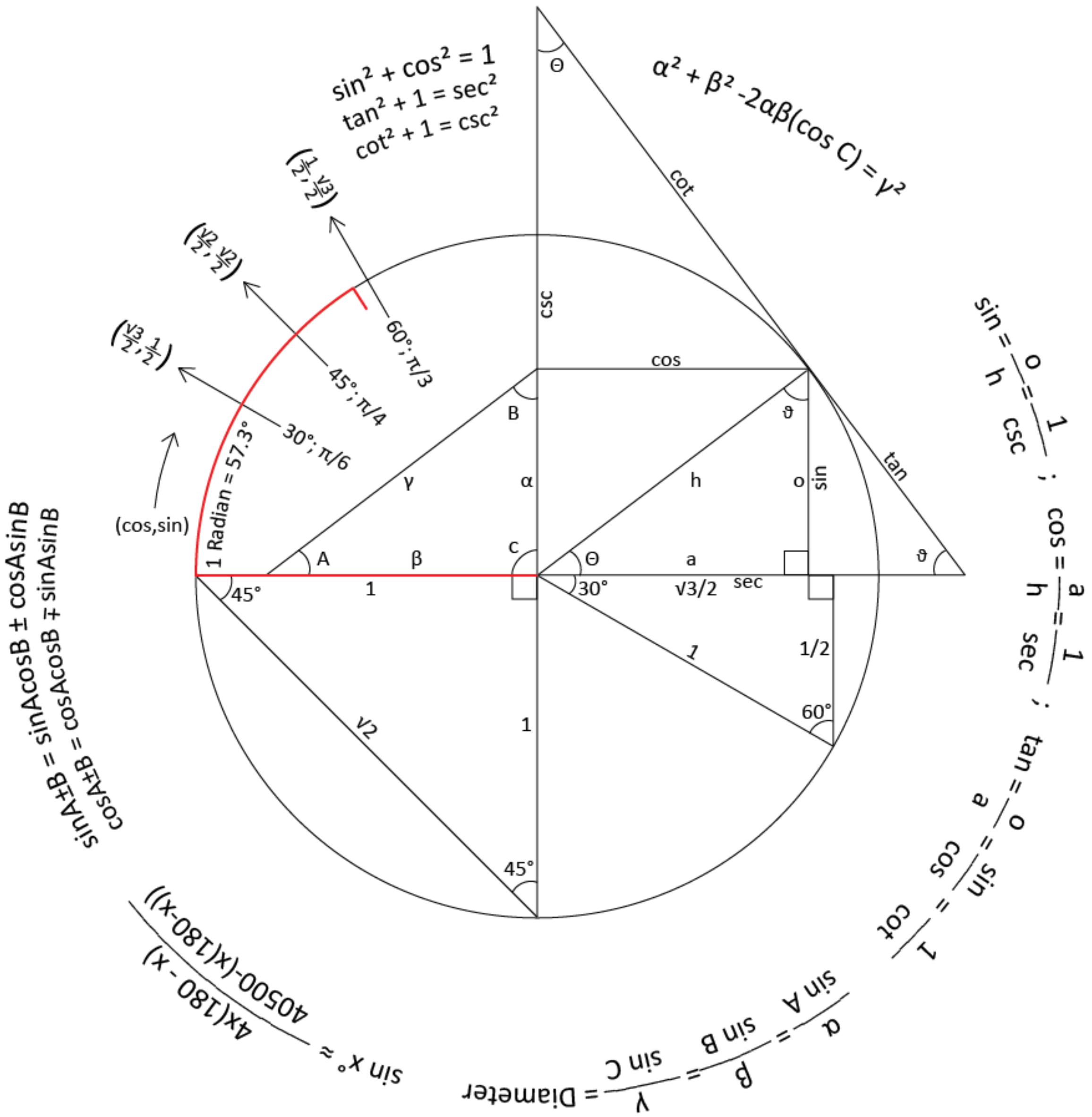
$\cos \frac{\pi}{6}=$ $\quad$ $\sec \frac{\pi}{6}=$

$\tan \frac{\pi}{6}=$ $\quad$ $\cot \frac{\pi}{6}=$

Aangesien dit dikwels gebeur dat ‘n hoek ‘n waarde van meer as $\frac{\pi}{2}$ radiale besit, **moet ons trigonometrie kan doen met hoeke in al vier kwadrante van die platvlak**. Voltooi die onderstaande skets.



Hier onder is nog 'n interessante manier om die meeste van ons trigonometrie-kennis op te som.



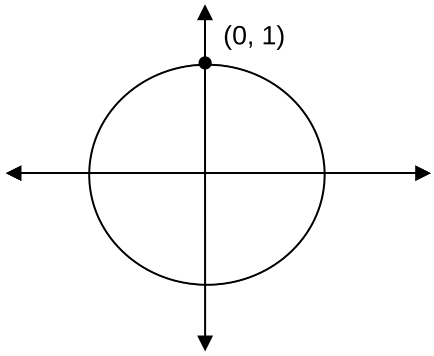
Meer oor spesiale hoeke

Gebruik die definisies in terme van die eenheidsirkel en bepaal die waardes van sinus, cosinus en tangens vir die volgende **spesiale hoeke** met behulp van die sketse:

(a) $\cos \frac{\pi}{2}$ = ………………………………

(b) $\sin \frac{\pi}{2}$ = ………………………………

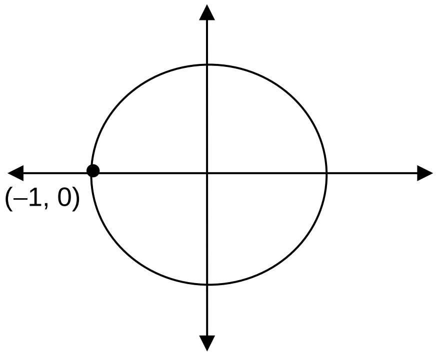
(c) $\tan \frac{\pi}{2}$ = ………………………………



(d) $\cos \pi$ = …………………………………

(e) $\sin \pi$ = ……………………………………..

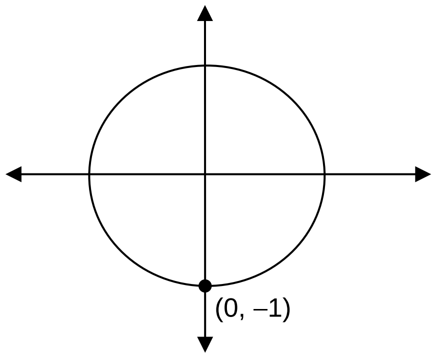
(f) $\tan \pi$ = ……………………………..……..



(g) $\cos \frac{3\pi}{2}$ = ………..……….…………

(h) $\sin \frac{3\pi}{2}$ = ……………………..……….

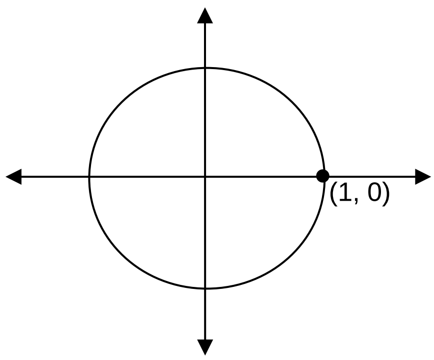
(i) $\tan \frac{3\pi}{2}$ = …………………………………



(j) $\cos 2\pi$ = ……………………..………….

(k) $\sin 2\pi$ = …………………………………….

(l) $\tan 2\pi$ = ……………………………………



Oefening 4.4

1. Bereken sonder 'n sakrekenaar en sonder om die hoekgroottes na grade om te skakel, die waardes van die volgende uitdrukkings.

1.1. $\sqrt{\tan^2\left(\frac{4}{3}\pi\right)+\sec^2\left(\frac{3}{4}\pi\right)\times 4\cos^2\left(\frac{11}{6}\pi\right)}$

1.2. $\left(\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)+\cos\left(\frac{5}{3}\pi\right)\right)^2+\operatorname{cosec}^2\left(\frac{\pi}{6}\right)$

1.3. $\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(\frac{5}{2}\pi\right)+3\cos(2\pi)}$

1.4. $3\cos^2(2\pi)+\frac{1}{3}\tan^2\left(\frac{4}{3}\pi\right)+2\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right)+2\cos^5\left(\frac{3}{2}\pi\right)$

1.5. $\dfrac{\sin^2\left(\frac{5}{4}\pi\right)\tan\left(\frac{4}{3}\pi\right)\sec^2\left(\frac{11}{6}\pi\right)}{\tan\left(\frac{2}{3}\pi\right)}$

1.6. $\sin^2\left(\frac{4}{3}\pi\right)+\sin^2\left(\frac{7}{6}\pi\right)$

1.7. $\sec^2\left(\frac{\pi}{3}\right)-\tan^2\left(\frac{\pi}{3}\right)$

1.8. $\operatorname{cosec}^2\left(\frac{2}{3}\pi\right)-\cot^2\left(\frac{2}{3}\pi\right)$

2. Gebruik die sketse aan die begin van hierdie leergedeelte en bewys die volgende.

2.1. $\operatorname{cosec}^2\theta=\cot^2\theta+1$

2.2. $\sec^2\theta=\tan^2\theta+1$

2.3. $\tan^4\theta+\tan^2\theta=\sec^4\theta-\sec^2\theta$

3. Vereenvoudig na die eenvoudigste vorm.

3.1. $\dfrac{\sin(\pi-\theta)\cot(\pi+\theta)\sec(2\pi-\theta)}{\cos^2(\pi+\theta)+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$

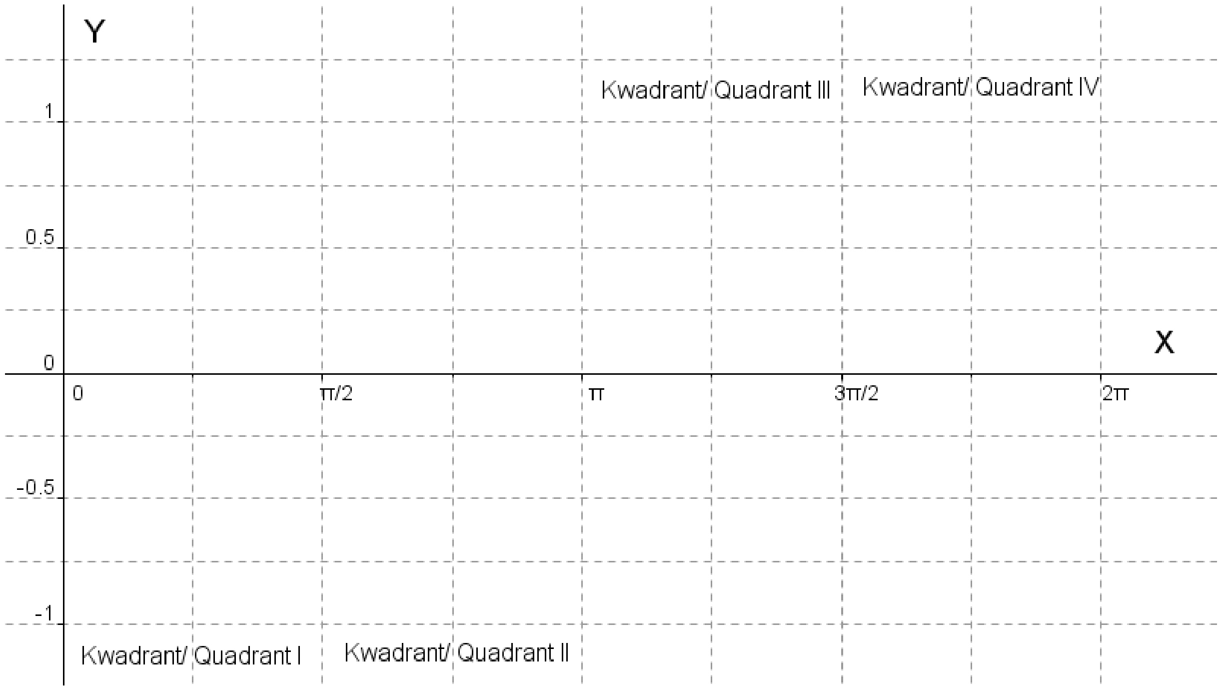
3.2. $\dfrac{\tan(\pi-\theta)\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$

3.3. $\dfrac{\sin(\pi+A)\cos(2\pi-A)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-A\right)\cos(2\pi+A)}$

4. Voltooi die volgende drie voorstellings van die basiese trigonometriese grafieke.

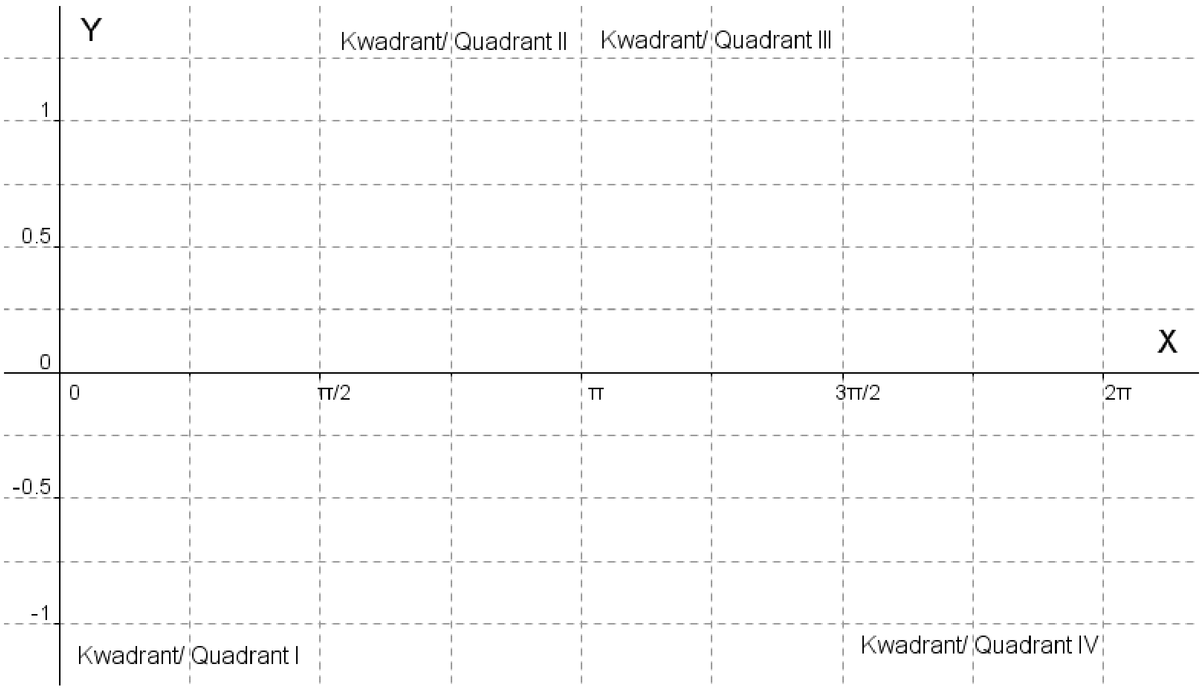
4.1. $y = \sin x$ for $x \in [0,2\pi]$

x	0	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	π	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	2π
y									



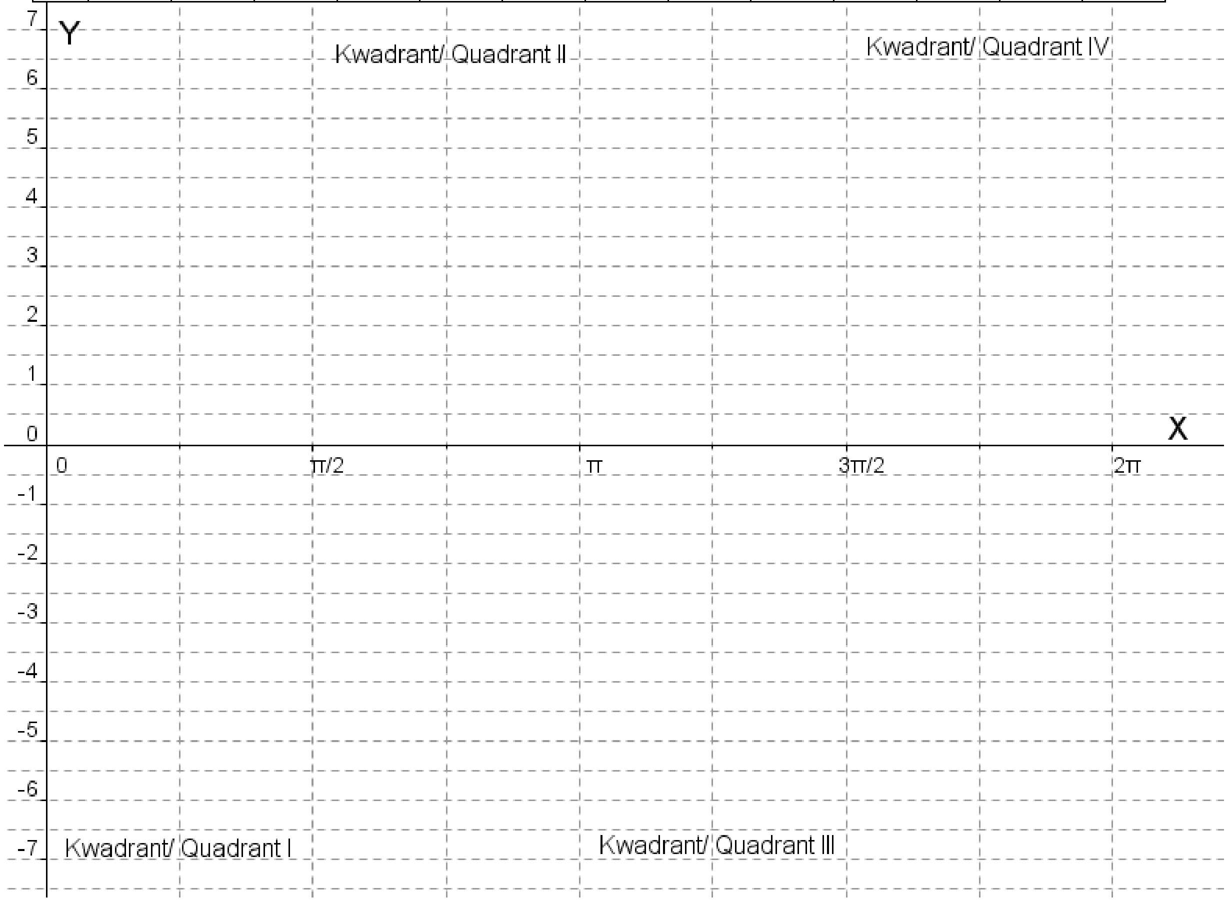
4.2. $y = \cos x$ for $x \in [0,2\pi]$

x	0	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	π	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	2π
y									



4.3. $y = \tan x$ for $x \in [0, 2\pi]$

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{45\pi}{100}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{55\pi}{100}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{145\pi}{100}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{155\pi}{100}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
y													



5. Los die volgende trigonometriese vergelykings op vir waardes van θ sodat $\theta \in [0, 2\pi]$.

5.1. $\sin\theta = -\frac{1}{2}$

5.2. $2\cos\theta = \sqrt{3}$

5.3. $\sqrt{3}\tan\theta + 1 = 0$

5.4. $\sec 2\theta + 2 = 0$

5.5. $\sqrt{3}\csc 2\theta + 2 = 0$

6. Los die volgende trigonometriese vergelykings op vir alle radiaal-waardes van θ, met ander woorde, vind die algemene oplossings.

6.1. $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right)$

6.2. $\sin(\cos x) = 0$

4.5 Die som- en verskilformules

Uit die definisies van die trigonometriese funksies kan die volgende belangrike identiteite afgelei word; in hierdie kursus het ons nie tyd om hul afleidings te bespreek nie, maar u kan dit gerus self naslaan.

$$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$$
$$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$$
$$\tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$$

Oefening 4.5

1. Gegee dat $\sin A = \frac{5}{13}$, $A \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ en $\cos B = -\frac{3}{5}$, $B \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$. Bereken die waardes van die uitdrukkings sonder die gebruik van ‘n sakrekenaar.
   1.1. $\sin(A - B)$
   1.2. $\cos(A + B)$
   1.3. $\tan(B - A)$
2. Bereken sonder ‘n sakrekenaar die waarde van $\cos\frac{\pi}{2}$ deur gebruik te maak van $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)$.
3. Bewys dat $\tan(\pi + \theta) = \tan\theta$.
4. Bereken sonder ‘n sakrekenaar die waarde van $\cos 23° \cos 67° - \sin 23° \sin 67°$.
5. Bereken sonder ‘n sakrekenaar die waarde van $\frac{\tan 18° + \tan 27°}{1 - \tan 18° \tan 27°}$.

4.6 Die dubbelhoekformules

Uit die som- en verskilformules kan die volgende belangrike identiteite afgelei word.

$$\sin 2A = 2\sin A \cos A$$
$$\begin{aligned}\cos 2A &= \cos^2 A - \sin^2 A \\ &= 2\cos^2 A - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2 A\end{aligned}$$
$$\tan 2A = \frac{2\tan A}{1 - \tan^2 A}$$

Oefening 4.6

1. Bewys dat $\sin 2A = 2\sin A \cos A$.
2. Bewys dat $\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A$.
3. Gebruik die uitdrukking in vraag 2 en lei ‘n uitdrukking af $\sin^2 A$ in terme van $\cos 2A$.
4. Bewys dat $\cos 2A = 2\cos^2 A - 1$.
5. Gebruik die uitdrukking in vraag 4 en lei ‘n uitdrukking af $\cos^2 A$ in terme van $\cos 2A$.
6. Bewys die volgende identiteite.
   6.1. $\frac{\sin\phi}{1+\cos\phi} = \tan\phi$
   6.2. $\sin(x + y)\sin(x - y) = \sin^2 x - \sin^2 y$
   6.3. $\frac{\sec x - \cos x}{\sin x + \tan x} = \operatorname{cosec} x - \cot x$
7. Bewys dat $\cos\frac{25\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{6}$.
8. Bewys dat $\cos\frac{28\pi}{3} = \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$.

4.7 Toepassing van trigonometrie en trigonometriese funksies

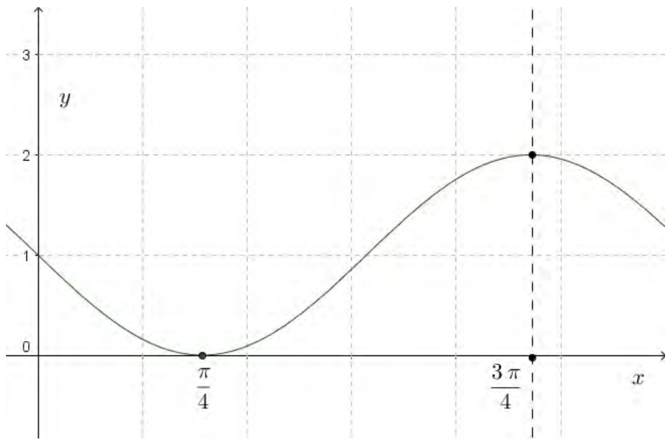
Oefening 4.7

1. 'n Driehoekige parkeerterrein het afmetings $\hat{B} = 29.5°$, $a = 254$ cm en $b = 195$ cm. Bepaal die oppervlakte van die parkeerterrein indien $\hat{C}$ 'n skerphoek is.

2. 'n Seemyl word gedefinieer as die afstand langs die boog van die oppervlak van die aarde wat 'n hoek van 1 minuut onderspan (1 min = 1/60 grade). Bepaal die waarde van 'n seemyl indien die radius van die aarde 3960 myl is.

3. 'n Vissersboot verlaat Durban se hawe en vaar na Richardsbaai in 'n rigting N 59º O vir 35 seemyl. Die boot draai dan in 'n rigting S 52º O en vaar vir 22 seemyl. Wat is die direkte afstand tussen die boot en Durban by hierdie punt? 'n Storm steek op. In watter rigting moet die skip seil om met die kortste roete terug te kom by Durban?

4. Beskou onderstaande grafiek



4.1. Bepaal ‘n vergelyking vir die kromme in elk van die volgende vorms.

4.1.1. $y = a\sin(bx + c) + d$

4.1.2. $y = a\sin[\omega(x + p)] + d$

4.1.3. $y = a\cos(bx + c) + d$

4.1.4. $y = a\cos[\omega(x + p)] + d$

4.2. Is die funksie ewe, onewe of nie een van die twee nie?

4.3. Klassifiseer die verskuifde grafieke as ewe, onewe of nie een van die twee nie:

4.3.1. Die grafiek word met 1 eenheid afwaarts geskuif.

4.3.2. Die grafiek word met 1 eenheid opwaarts geskuif.

4.3.3. Die grafiek word na links geskuif met $\frac{\pi}{4}$ eenhede.

5. 'n Plastiekhouer dobber op die oseaan in eenvoudige harmoniese beweging. Die afstand bo die seebodem word gegee deur $y = 0.2\cos(20\pi t) + 8$ met y in meters en t in minute.

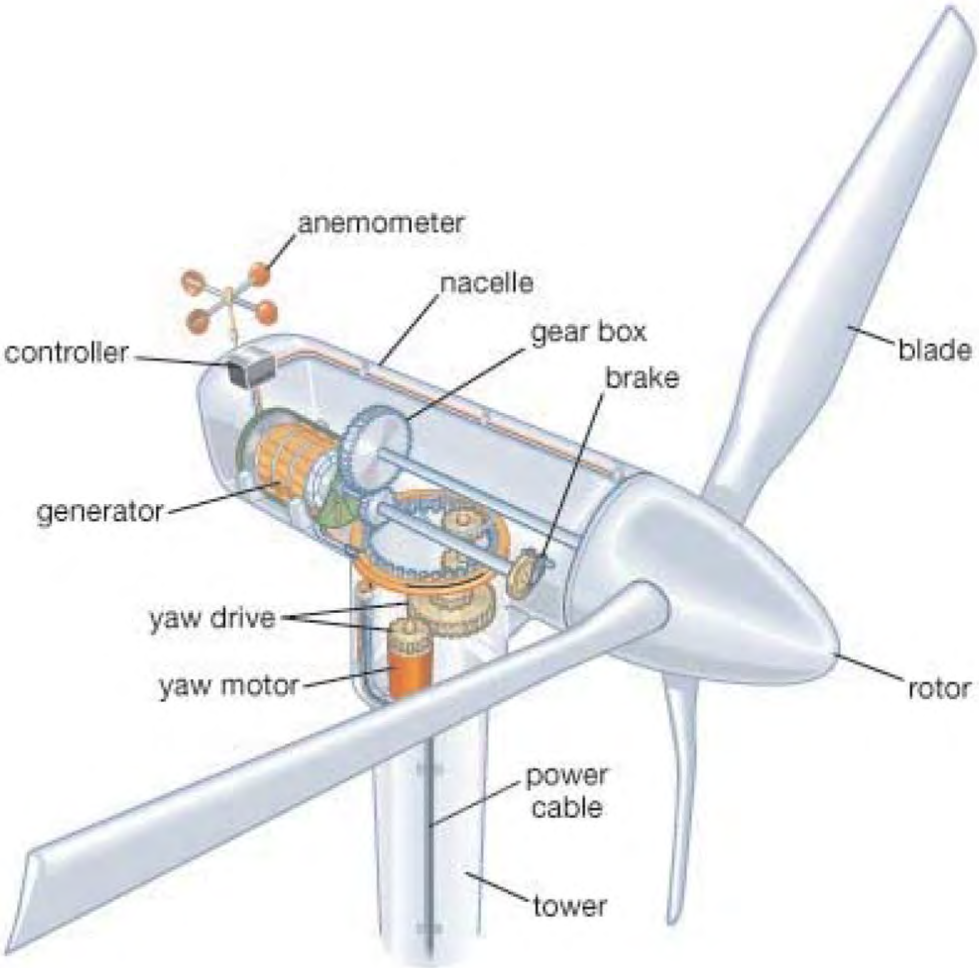
5.1. Bepaal die frekwensie van die beweging.

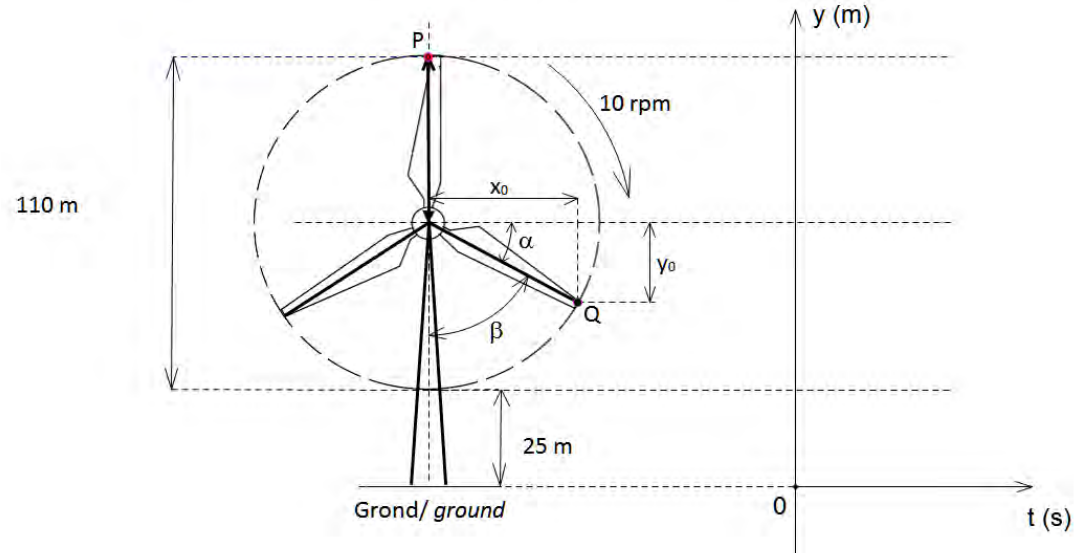
5.2. Bepaal die periode van die beweging.

5.3. Bepaal die maksimum verplasing van die kurk bo die oseaanbedding.

5.4. Skets die grafiek van die beweging.

6. Beskou die bostaande inligting aangaande 'n windturbine.





Bereken die volgende.

6.1. Radius (lengte van een rotorlem)

6.2. Periode (tyd om een volle rotasiesiklus te voltooi) in sekondes

6.3. Frekwensie van die beweging

6.4. Hoekfrekwensie

6.5. Grootte van hoek α in radiale

6.6. Die afstande x_0 en y_0

6.7. Die lengte van boog PQ

6.8. Die tyd in sekonde wat ʼn rotorlem neem om deur die hoek β te draai

6.9. Die fase c van die rotasiebeweging

6.10. Skryf nou ʼn golfvergelyking wat y (die hoogte van punt Q bokant die grond) as funksie van tyd gee. Gebruik ʼn sinusfunksie.

6.11. Skets ʼn netjiese grafiek van die funksie wat u in 6.10 ontwikkel het.

5 Ongelykhede en absolute waarde

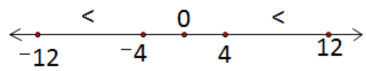
Leerdoelstellings vir hierdie leereenheid

Na afhandeling van hierdie leereenheid moet die student in staat wees om die volgende te doen:

1. Ongelykhede op te los.
2. Die absolute waarde-bewerking op algebraïese uitdrukkings toe te pas.
3. Die absolute waarde-funksie as 'n stuksgewyse funksie te definieer.
4. Die absolute waarde-funksie as die "afstand"-funksie te interpreteer en grafies voor te stel.

5.1 Ongelykhede

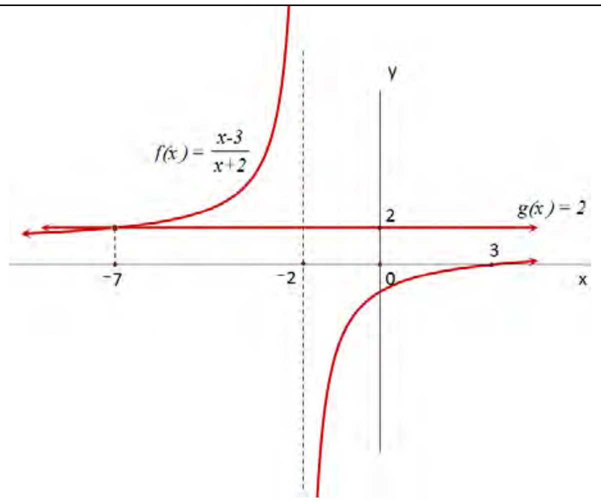
Indien ons die $=$ in 'n vergelyking vervang met een van die relasietekens $<$, $\leq$, $>$ of $\geq$ dan verkry ons 'n ongelykheid. Sulke ongelykhede kan op soortgelyke wyse opgelos word as gewone vergelykings, solank die volgende in gedagte gehou word.

Eienskap	Voorbeeld
As $a < b$ dan $-a > -b$. (Vermenigvuldiging of deling deur -1 verander die ongelykheidsteken.)	$4 < 12$ is waar Maar $-4 < -12$ is valse. So $-4 > -12$ of $-12 < -4$. 
As $a < b$ dan $a + c < b + c$ en $a - c < b - c$.	As $x - 3 < 0$ dan $x - 3 + 3 < 0 + 3$ en $x < 3$.
As $a < b$ en $c > 0$ dan $ac < bc$ en $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.	As $\frac{x}{2} < 4$ dan $\frac{x}{2} \times 2 < 4 \times 2$ en $x < 8$.
As $a < b$ en $c < 0$ dan $ac > bc$ en $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.	As $-\frac{x}{5} < 6$ dan $-\frac{x}{5} \times (-5) < 6 \times (-5)$ en $x > -30$.
As $a < b$ en $b < c$ dan $a < c$.	As $a < x$ en $x < 2$ dan $a < 2$.

Die dodelikste gevaar by die oplos van ongelykhede is waarskynlik by rasionale ongelykhede, wat NIE soos rasionale vergelykings gehanteer kan word NIE.

Beskou die volgende voorbeelde aandagtig.

Rasionale vergelyking	**Rasionale ongelykheid**
$\frac{x-3}{x+2} = 2$ $\therefore \frac{x-3}{x+2} \times \frac{x+2}{1} = 2 \times \frac{x+2}{1}$ $\therefore x - 3 = 2x + 4$ $\therefore -x = 7$ $\therefore x = -7$ DIE KGV WORD GEBRUIK OM WEG TE DOEN MET DIE BREUKVORM Grafies:	$\frac{x-3}{x+2} > 2$ $\therefore \frac{x-3}{x+2} - 2 > 0$ $\therefore \frac{x-3}{x+2} - 2 \times \frac{x+2}{x+2} > 0$ $\therefore \frac{x-3}{x+2} - \frac{2x-4}{x+2} > 0$ $\therefore \frac{x-3-2x-4}{x+2} > 0$ BEHOU BREUKVORM/ KEEP FRACTION FORM! $\therefore \frac{-x-7}{x+2} > 0$ $\therefore \frac{x+7}{x+2} < 0$ so/so $\frac{x+7}{x+2}$ is negatief/negative Ons stel nou intervalle saam uit punte $x = -7$ en $x = -2$.



interval	$(-\infty;-7)$ of/or $x<-7$	$(-7;-2)$ of/or $-7<x<-2$	$(-2;\infty)$ of/or $x>-2$
monsterpunt/ *sample point*	-8	-5	-1
waarde van/ *value of* $\frac{x+7}{x+2}$	0,167	–0,667	6

$\frac{x+7}{x+2}$ is negatief op $-7<x<-2$.

Die oplossing van $\frac{x-3}{x+2}>2$ is dus $-7<x<-2$, ook geskryf as $(-7;-2)$. (vergelyk met grafiek links)

Rasionale vergelyking

$$\frac{2x+1}{x-1}-\frac{2}{x-3}=1$$

$$\therefore \frac{(x-1)(x-3)}{1}\times\left(\frac{2x+1}{x-1}-\frac{2}{x-3}\right)=1\times\frac{(x-1)(x-3)}{1}$$

$$\therefore (2x+1)(x-3)-2(x-1)=(x-1)(x-3)$$

$$\therefore 2x^2-7x-1=x^2-4x+3$$

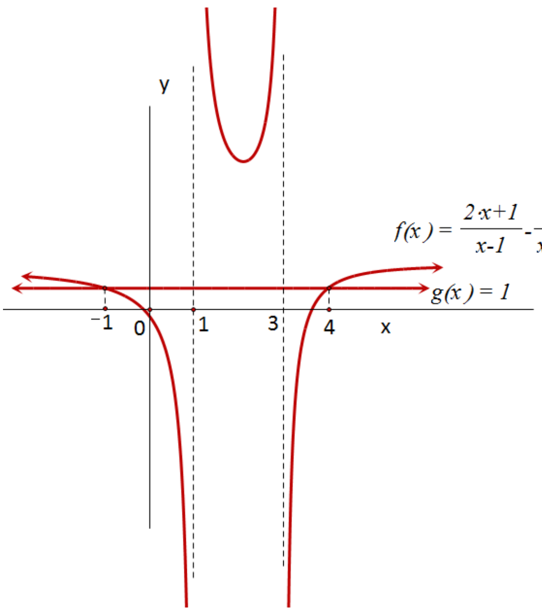
$$\therefore x^2-3x-4=0$$

$$\therefore (x-4)(x+1)=0$$

$$\therefore x=4 \text{ of / } or \;\; x=-1$$

DIE KGV WORD GEBRUIK OM WEG TE DOEN MET DIE BREUKVORM

Grafies



Rasionale ongelykheid

$$\frac{2x+1}{x-1}-\frac{2}{x-3}<1$$

$$\therefore \frac{2x+1}{x-1}-\frac{2}{x-3}-1<0$$

$$\therefore \frac{(2x+1)(x-3)}{(x-1)(x-3)}-\frac{2(x-1)}{(x-3)(x-1)}-\frac{(x-3)(x-1)}{(x-3)(x-1)}<0$$

$$\therefore \frac{x^2-3x-4}{(x-1)(x-3)}<0$$

$$\therefore \frac{(x-4)(x+1)}{(x-1)(x-3)}<0$$

Ons stel nou intervalle saam uit punte $x=4$, $x=-1$, $x=1$ en $x=3$:

interval	$-\infty<x<-1$ of/or $(-\infty;-1)$	$-1<x<1$ of/or $(-1;1)$	$1<x<3$ of/or $(1;3)$	$3<x<4$ of/or $(3;4)$	$x>4$ of/or $(4;\infty)$
monsterpunt/ *sample point*	–2	0	2	3,5	5
waarde van/ *value of* $\frac{(x-4)(x+1)}{(x-1)(x-3)}$	0,4	–1,333	6	–1,8	0,75

$\frac{(x-4)(x+1)}{(x-1)(x-3)}$ is negatief op $-1<x<1$ of $3<x<4$.

Die oplossing is dus $(-1,1) \cup (3,4)$

(vergelyk met grafiek links)

Oefening 5.1

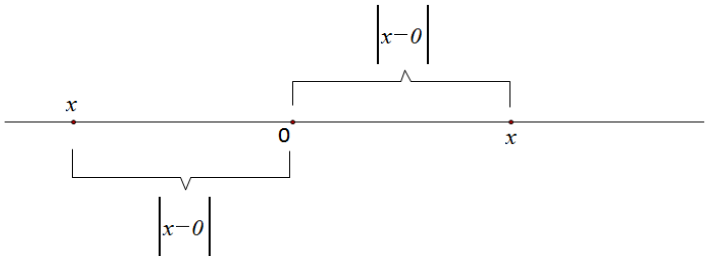
Los op die volgende ongelykhede.

1. $\frac{x-3}{x+1} \geq 0$
2. $\frac{2x+1}{x-5} \leq 3$
3. $\frac{1+x}{1-x} - \frac{1-x}{1+x} \leq -1$

5.2 Absolute waarde

Die afstand-definisie

$|x|$ beteken $|x-0|$ en dit beteken die grootte van die afstand tussen die punt 0 op die getallelyn en die punt x.



Dit is duidelik dat x aan enige kant van die punt 0 kan lê; die afstand $|x-0|$ is altyd positief. Dus, die waarde van $|x|$ vir enige waarde van x sal altyd positief wees. Die getal $|x-0|$ kan verkry word deur ‘n passer se radius op $|x|$ te stel en die punt op die nulpunt neer te sit. Dan kan die punt x aan weerskante van die nulpunt afgemerk word. Die uitdrukking $|x-a|$ kan meetkundig beskou word as **die afstand** tussen die twee getalpunte x en a op die getallelyn. Aangesien afstand altyd positief is, beteken $|x-a|$ dieselfde as $|a-x|$.

Die formele algebraïese definisie

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} \text{ en in die algemeen } |x-a| = \begin{cases} x-a, & x-a \geq 0 \\ -(x-a) & x-a < 0 \end{cases} = \begin{cases} x-a, & x \geq a \\ a-x & x < a \end{cases}$$

Die formule algebraïese definisie gee ons 'n manier om die absolute waarde-funksie, gedefinieer deur

$$f(x) = a|bx-d| + h$$

maklik te skets. Die geheim is om die funksie as 'n stuksgewyse funksie te hanteer. Dan gedra die absolute waarde-funksie haarself soos 'n kombinasie van twee beperkte reguit lyn-grafieke. Die knakpunt is die punt op die grafiek waaromheen die grafiek simmetries is.

$$\begin{aligned} f(x) &= a|bx-d|+h \\ \therefore f(x) &= \begin{cases} a(bx-d)+h & \text{as/if} \quad bx-d \geq 0 \\ -a(bx-d)+h & \text{as/if} \quad bx-d < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} abx-ad+h & \text{as/if} \quad bx \geq d \\ -abx+ad+h & \text{as/if} \quad bx < d \end{cases} \\ &= \begin{cases} \overbrace{(ab)}^{m}x + \overbrace{(-ad+h)}^{c} & \text{as/if} \quad x \geq \dfrac{d}{b} \\ \left(\underbrace{-ab}_{m}\right)x + \underbrace{(ac+h)}_{c} & \text{as/if} \quad x < \dfrac{d}{b} \end{cases} \end{aligned}$$

Die knakpunt is dus by $x = \frac{d}{b}$. Vervang $x = \frac{d}{b}$ in $y = (ab)x + (-ad+h)$ om die y koördinaat te verkry.

$$y = (ab)\frac{d}{b} + (-ad+h) = h$$

Die draaipunt is dus by $\left(\frac{d}{b}, h\right)$.

Voorbeeld

Skets die grafieke van die volgende funksies.

1. $y = 2\left|\frac{1}{4}x - 2\right| + 4$ 2. $y = -\frac{1}{4}|3x + 5| - 3$

1. $$y = 2\left|\frac{1}{4}x - 2\right| + 4$$

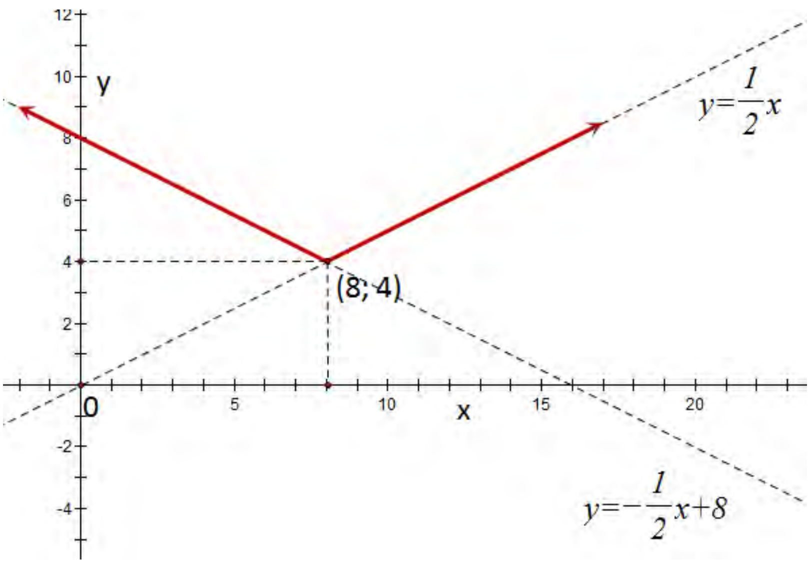
$$\therefore y = \begin{cases} 2\left(\frac{1}{4}x - 2\right) + 4 & \text{as/ if} \quad \frac{1}{4}x - 2 \geq 0 \\ -2\left(\frac{1}{4}x - 2\right) + 4 & \text{as/ if} \quad \frac{1}{4}x - 2 < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}x - 4 + 4 & \text{as/ if} \quad \frac{1}{4}x \geq 2 \\ -\frac{1}{2}x + 4 + 4 & \text{as/ if} \quad \frac{1}{4}x < 2 \end{cases}$$

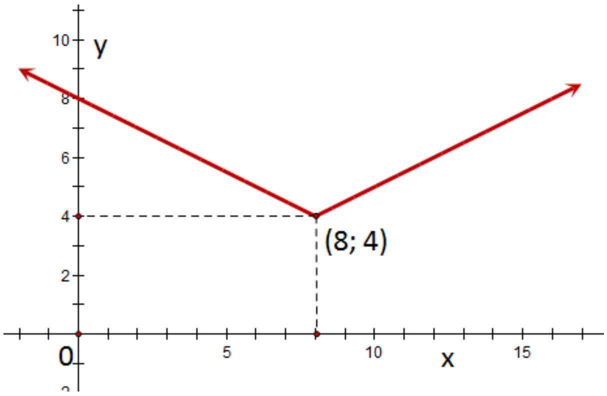
$$= \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{as/ if} \quad x \geq 8 \\ -\frac{1}{2}x + 8 & \text{as/ if} \quad x < 8 \end{cases}$$

Knakpunt/ *vertex*: $(8; 4)$

Dit lewer



Normaalweg wys ons nie die twee "hulplyne" nie.



2. $$y=-\frac{1}{4}|3x+5|-3$$

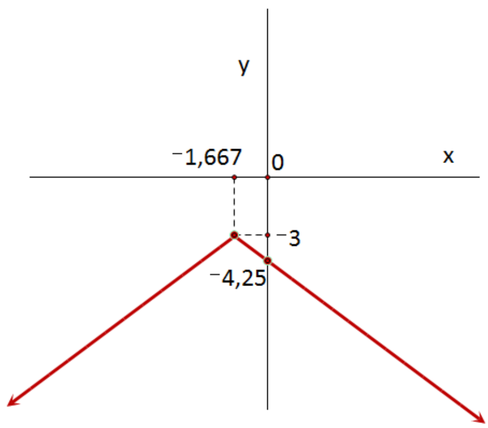
$$\therefore y=\begin{cases}-\frac{1}{4}(3x+5)-3 & \text{as/ if} \quad 3x+5\geq 0\\ +\frac{1}{4}(3x+5)-3 & \text{as/ if} \quad 3x+5<0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}-\frac{3}{4}x-\frac{5}{4}-3 & \text{as/ if} \quad 3x\geq -5\\ \frac{3}{4}x+\frac{5}{4}-3 & \text{as/ if} \quad 3x<-5\end{cases}$$

$$=\begin{cases}-\frac{3}{4}x-\frac{17}{4} & \text{as/ if} \quad x\geq -\frac{5}{3}\\ \frac{3}{4}x-\frac{7}{4} & \text{as/ if} \quad x<-\frac{5}{3}\end{cases}$$

Knakpunt/ *vertex*: $\left(-\frac{5}{3};-3\right)$

Dit lewer



Meetkundige definisie

Hoe kan ons 'n getallelyn gebruik om betekenis te gee aan $|x-a|=r$? Wat is die meetkundige betekenis van $|x-a|=r$?

Aangesien $|x-a|=r$ dieselfde is as $|(x-a)-0|=r$, beteken dit dat $x-a$ **presies** r eenhede vanaf 0 op die getallelyn lê. Merk die punte r en $-r$ op die getallyn. Dit is waar $x-a$ is. Hier uit volg dat $x-a=r$ of $x-a=-r$ en $x=a+r$ of $x=a-r$. In terme van afstand beteken dat x 'n afstand r eenhede na links of na regs van a is. Ons kan ook stel dat $x=a\pm r$.

Indien $|x-a|<r$ beteken dit dat $x-a$ **minder** as r eenhede vanaf 0 op die getallelyn lê. Op die getallelyn is $x-a$ dus in die gebied tussen $-r$ en r. Hier uit volg dat $x-a<r$ en $x-a>-r$, dus $-r<x-a<r$ en $a-r<x<a+r$. In terme van afstand beteken dit dat x in die gebeid tussen 'n afstand r eenhede na links en na regs van a is. Ons kan ook stel dat $x\in(a-r,a+r)$.

Indien $|x-a|>r$ beteken dit dat $x-a$ **meer** as r eenhede vanaf 0 op die getallelyn lê. Op die getallelyn is $x-a$ dus in die gebied buite $-r$ en r. Hier uit volg dat $x-a>r$ of $x-a<-r$, waaruit volg dat $x>a+r$ of $x<a-r$. In terme van afstand beteken dit dat x in die gebeid buite 'n afstand r eenhede na links of na regs van a is. Ons kan ook stel dat $x\in(-\infty,a-r)\cup(a+r,\infty)$.

Vir $|x-a|\leq r$ geld dit dat $a-r\leq x\leq a+r$ of $x\in[a-r,a+r]$ en vir $|x-a|\geq r$ geld dit dat $x\geq a+r$ of $x\leq a-r$ of $x\in(-\infty,a-r]\cup[a+r,\infty)$.

Nog belangrike eienskappe van die absolute waarde-bewerking

$$|x|=\sqrt{x^2},-|x|=-\sqrt{x^2},|a||b|=|ab|,\frac{|a|}{|b|}=\left|\frac{a}{b}\right|,|a-x|=|x-a|$$

Voorbeeld 1

Bepaal x sodat $2|3x-4| = 20$.

Oplossing (3 metodes)

- Meetkundige definisie

$$2|3x-4| = 20$$
$$\therefore |3x-4| = 10$$
$$\therefore |(3x-4)-0| = 10$$

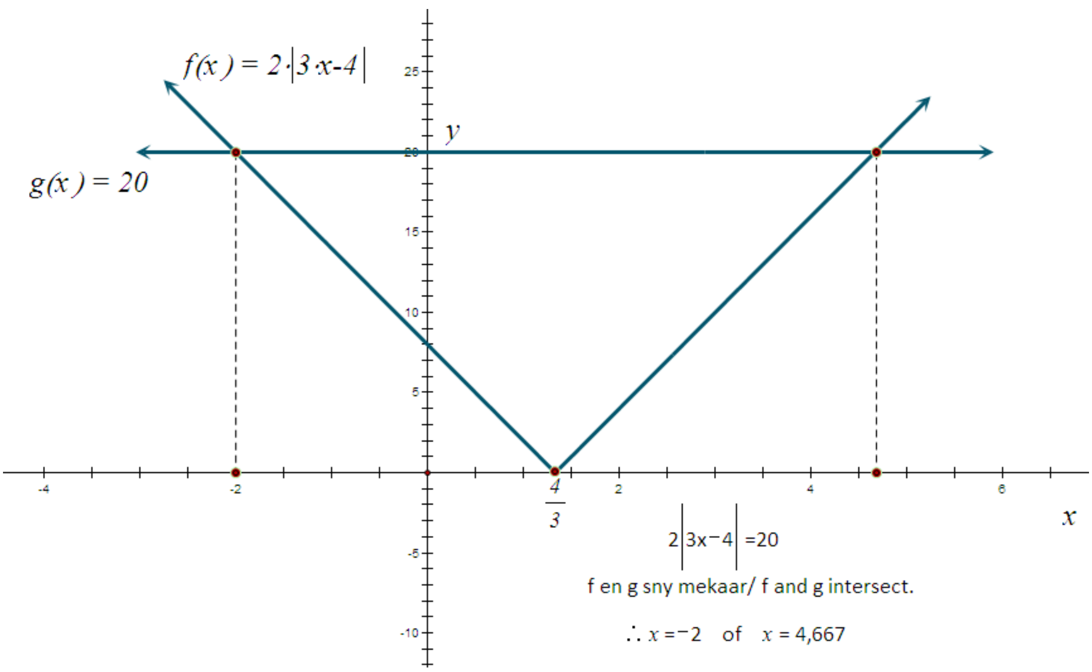
Bepaal dus die waarde van x sodat $3x-4$ presies 10 eenhede van die punt 0 op die getallyn lê.

$$\therefore 3x-4=-10 \quad \text{of / } or \quad 3x-4=10$$
$$\therefore x=-2 \quad \text{of / } or \quad x=\frac{14}{3}$$

- Formele definisie

$$2|3x-4|=20$$
$$\therefore |3x-4|=10$$
$$\therefore \begin{cases} 3x-4=10 & \text{as} \quad 3x-4 \geq 0 \\ -(3x-4)=20 & \text{as} \quad 3x-4<0 \end{cases}$$
$$\therefore \begin{cases} 3x=14 & \text{as} \quad 3x \geq 4 \\ -3x+4=10 & \text{as} \quad 3x<4 \end{cases}$$
$$\therefore \begin{cases} x=\dfrac{14}{3} & \text{as} \quad x \geq \dfrac{4}{3} \\ -3x=6 & \text{as} \quad x<\dfrac{4}{3} \end{cases}$$
$$\therefore \begin{cases} x=4,667 & \text{as} \quad x \geq \dfrac{4}{3} \\ x=-2 & \text{as} \quad x<\dfrac{4}{3} \end{cases}$$

- Grafiese interpretasie



Voorbeeld 2

Los op vir x sodat $3|2x-7| \leq 30$.

Oplossing (3 metodes)

- Meetkundige definisie

$$3|2x-7| \leq 30$$
$$\therefore |2x-7| \leq 10$$
$$\therefore |(2x-7)-0| \leq 10$$

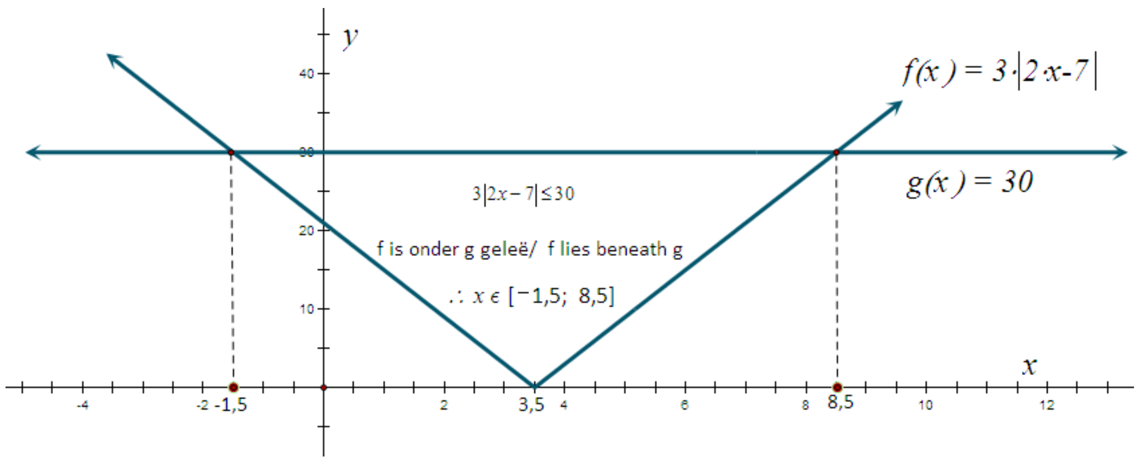
Bepaal dus die waarde van x sodat $2x-7$ binne 10 eenhede van die punt 0 op die getallyn lê.

$$\therefore -10 \leq 2x-7 \leq 10$$
$$\therefore -3 \leq 2x \leq 17$$
$$\therefore -\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{17}{2}$$
$$\therefore x \in [-1,5;8,5]$$

- Formele definisie

$$3|2x-7| \leq 30$$
$$\therefore \begin{cases} 3(2x-7) \leq 30 & \text{as} \quad 2x-7 \geq 0 \\ -3(2x-7) \leq 30 & \text{as} \quad 2x-7 < 0 \end{cases}$$
$$\therefore \begin{cases} 6x-21 \leq 30 & \text{as} \quad 2x \geq 7 \\ -6x+21 \leq 30 & \text{as} \quad 2x < 7 \end{cases}$$
$$\therefore \begin{cases} 6x \leq 51 & \text{as} \quad x \geq \frac{7}{2} \\ -6x \leq 9 & \text{as} \quad x < \frac{7}{2} \end{cases}$$

- Grafiese interpretasie



Voorbeeld 3

Los op vir x sodat $-2|3x+4| < -6$.

Oplossing (3 metodes)

- Meetkundige definisie

$$\begin{aligned} &-2|3x+4| < -6 \\ &\therefore |3x+4| > 3 \\ &\therefore |(3x+4)-0| > 3 \end{aligned}$$

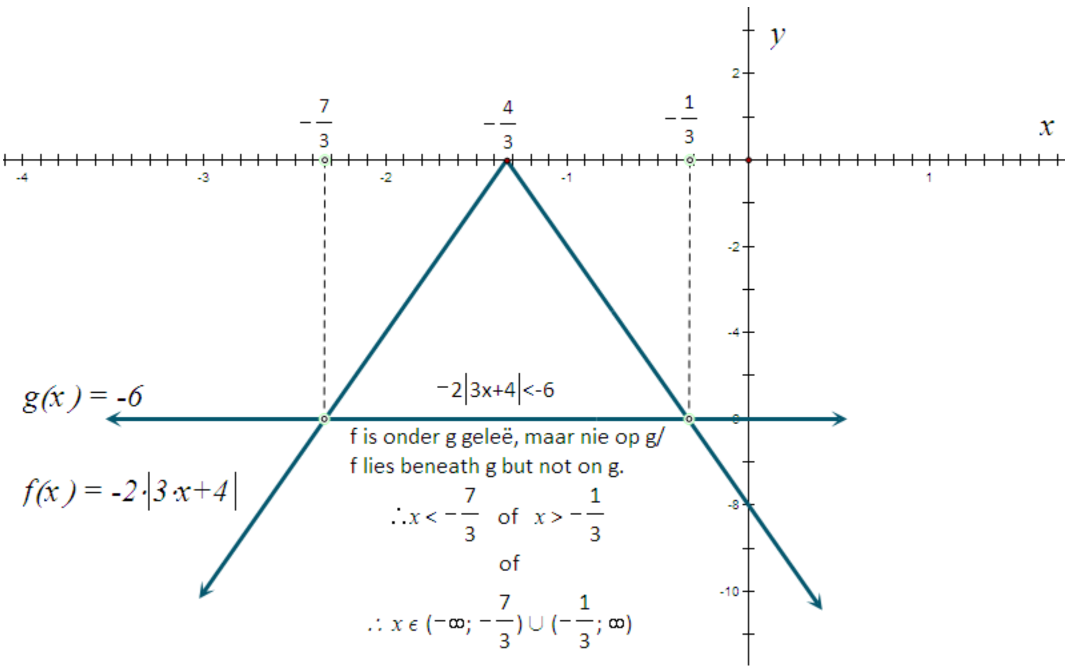
Bepaal dus die waarde van x sodat $3x+4$ buite 3 eenhede van die punt 0 op die getallyn lê.

$$\begin{array}{lcl} \therefore 3x+4 < -3 & \text{of / } or & 3x+4 > 3 \\ \therefore x < -\dfrac{7}{3} & \text{of / } or & x > -\dfrac{1}{3} \\ \therefore \left(-\infty; -\dfrac{7}{3}\right) \cup \left(-\dfrac{1}{3}; \infty\right) & & \end{array}$$

- Formele definisie

$$\begin{aligned} &-2|3x+4| < -6 \\ &\therefore |3x+4| > 3 \\ &\therefore \begin{cases} 3x+4 > 3 & \text{as} \quad 3x+4 \geq 0 \\ -(3x+4) > 3 & \text{as} \quad 3x+4 < 0 \end{cases} \\ &\therefore \begin{cases} 3x > -1 & \text{as} \quad 3x \geq -4 \\ -3x-4 > 3 & \text{as} \quad 3x < -4 \end{cases} \\ &\therefore \begin{cases} 3x > -1 & \text{as} \quad x \geq -\dfrac{4}{3} \\ -3x > 7 & \text{as} \quad x < -\dfrac{4}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

- Grafiese interpretasie



Oefening 5.2

1. Los die onbekende op.

   1.1. $3|2-k|=0$

   1.2. $-2|2t+1|=6$

   1.3. $\left|\frac{r}{2}+\frac{1}{2}\right|=|-2|$

2. Los op vir die onbekende en stel die oplossing op 'n getallelyn voor.

   2.1. $|x+2|\leq 2$

   2.2. $-3|2x-5|<-9$

   2.3. $-6\left|\frac{2-3x}{4}\right|>6$

3. Skryf die volgende in absolute waarde-notasie.

   3.1. x is minder as 3 eenhede vanaf 7.

   3.2. t is nie meer as 5 eenhede vanaf 8.

   3.3. y lê tussen -3 en 3.

   3.4. Die afstand tussen 6 en m is 4.

6 Limiete en kontinuïteit

Leerdoelstellings vir hierdie leereenheid

Na afhandeling van hierdie leereenheid moet die student in staat wees om die volgende te doen:

1. Die absolute waarde-funksie as die "afstand"-funksie te interpreteer en grafies voor te stel.
2. Die limiet van 'n funksie in terme van linkerlimiete en regterlimiete in die omgewing van 'n punt te bepaal.
3. Uitspraak te kan lewer oor die kontinuïteit van 'n funksie in 'n bepaalde punt.
4. Sekere limiete te bereken.
5. Die epsilon-delta-definisie van die limiet van 'n funksie toe te pas om te bewys dat die limiet van 'n funksie in 'n bepaalde punt bestaan.

6.1 Limiete en kontinuïteit

Dikwels stel ons daarin belang om te weet wat die waarde is wat 'n funksie aanneem wanneer die onafhanklike veranderlike baie groot negatief raak, of baie groot positief raak, of wanneer die onafhanklike 'n sekere waarde aanneem. Dit is nie in alle gevalle moontlik om gewoon die onafhanklike veranderlike in die funksie te vervang en dan die funksiewaarde te bereken nie. Vervolgens kyk ons na funksies wie se gedrag slegs met behulp van limiete volledig beskryf kan word.

Voorbeeld 1

Beskou die funksie.

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-1} - \frac{2}{x-3}$$

1. Bepaal $f(2)$, dit is die funksiewaarde in die punt waar $x = 2$.
2. Die funksiewaarde in die punt waar $x = 2$ gee egter geen inligting oor die gedrag van die funksie baie naby aan die punt waar $x = 2$ nie. Laat ons die gedrag van die funksie ondersoek in die omgewing van hierdie punt. Voltooi die volgende tabel.

As/*if* $x<2$		As/*if* $x>2$	
x	$f(x)=\frac{2x+1}{x-1}-\frac{2}{x-3}$	x	$f(x)=\frac{2x+1}{x-1}-\frac{2}{x-3}$
1		2,001	
1,5		2,01	
1,9		2,1	
1,99		2,5	
1,999		3	

2.1. Waarna streef die funksiewaarde wanneer x vanaf die linkerkant na 2 streef?

$\lim\limits_{x\to 2^-}\left(\frac{2x+1}{x-1}-\frac{2}{x-3}\right)=$.................... of korter $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=$....................

2.2. Waarna streef die funksiewaarde wanneer x vanaf die regterkant na 2 streef?

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=$....................

2.3. Hoe vergelyk die antwoorde van 2.1 en 2.2? $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ .... $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$

Wanneer die linkerlimiet en die regterlimiet van 'n funksie dieselfde waarde aanneem in 'n punt, dan sê ons die funksie het 'n limiet in daardie punt.

Omdat $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=$............. kan ons skryf $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=$.............

Die limiet van 'n funksie in 'n bepaalde punt bestaan slegs as beide die linkerlimiet en die regterlimiet in daardie punt bestaan en beide die linkerlimiet en die regterlimiet dieselfde waarde het. In hierdie geval het ons dat die funksiewaarde in die punt waar $x = 2$ en die limiet van die funksie wanneer x van albei kante streef na 2 dieselfde waarde lewer.

$$\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$$

Hierdie spesiale sameloop van omstandighede impliseer dat die funksie f **kontinu** (aaneenlopend, sonder spronge of onderbrekings) is in die punt waar $x = 2$.

3. Laat die gedrag van die funksie ondersoek waar x baie groot negatief en waar x baie groot positief word. Voltooi die volgende tabel.

As/*if* $x \to -\infty$		As/*if* $x \to \infty$	
x	$f(x) = \frac{2x+1}{x-1} - \frac{2}{x-3}$	x	$f(x) = \frac{2x+1}{x-1} - \frac{2}{x-3}$
-10		10	
-100		100	
-1000		1000	
$-10\,000$		10 000	

3.1. Waarna streef die funksiewaarde wanneer x na negatief oneindig streef?

$\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{2x+1}{x-1} - \frac{2}{x-3}\right) =$ .... of korter $\lim_{x\to -\infty} f(x) =$ ....

3.2. Waarna streef die funksiewaarde wanneer x na postief oneindig streef?

$\lim_{x\to \infty} f(x) =$ ....

Uit die limiete $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ en $\lim_{x\to \infty} f(x)$ kan ons dikwels die **horisontale asimptote** van 'n funksie vind.

4. Bepaal $f(3)$, dit is die funksiewaarde in die punt waar $x = 3$.

5. Die funksiewaarde in die punt waar $x = 3$, selfs al het dit bestaan, gee geen inligting oor die gedrag van die funksie in die omgewing van die punt $x = 3$ is nie. Laat ons die gedrag van die funksie ondersoek in die omgewing van hierdie punt, waar die funksie ongedefinieerd is. Voltooi die volgende tabel.

As/*if* $x < 3$		As/*if* $x > 3$	
x	$f(x) = \frac{2x+1}{x-1} - \frac{2}{x-3}$	x	$f(x) = \frac{2x+1}{x-1} - \frac{2}{x-3}$
2		3,001	
2,5		3,01	
2,9		3,1	
2,99		3,5	
2,999		4	

5.1. Waarna streef die funksiewaarde wanneer x vanaf die linkerkant na 3 streef?

$\lim_{x\to 3^-}\left(\frac{2x+1}{x-1} - \frac{2}{x-3}\right) =$ .... of korter $\lim_{x\to 3^-} f(x) =$ ....

5.2. Waarna streef die funksiewaarde wanneer x vanaf die regterkant na 3 streef?

$\lim_{x\to 3^+} f(x) =$ ....

5.3. Hoe vergelyk die antwoorde van 5.1 en 5.2?

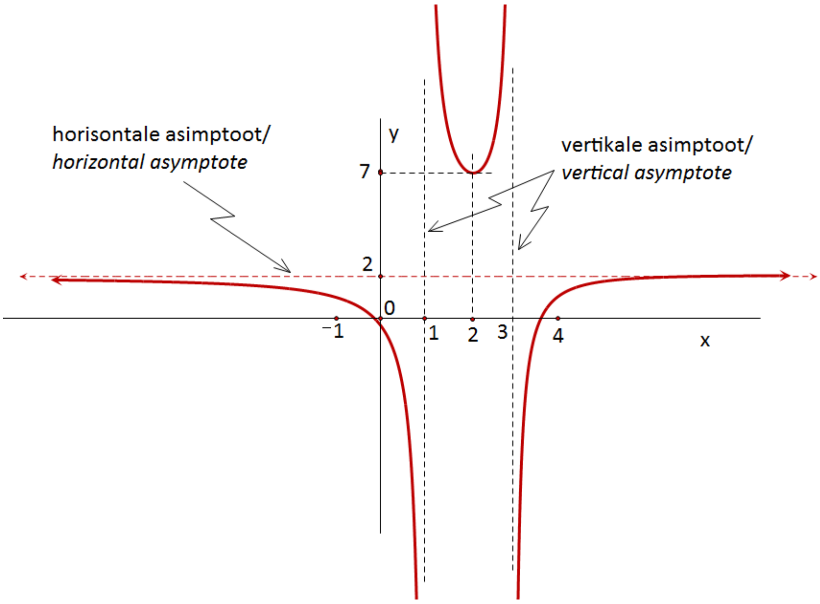
$\lim_{x \to 3^-} f(x)$....... $\lim_{x \to 3^+} f(x)$

Wanneer die linkerlimiet en die regterlimiet van 'n funksie nie dieselfde waarde aanneem in 'n punt nie, dan sê ons die funksie het nie 'n limiet in daardie punt nie.

Omdat $\lim_{x \to 3^-} f(x) \neq \lim_{x \to 3^+} f(x)$ kan ons skryf $\lim_{x \to 3} f(x)$ bestaan nie.

Aangesien die linkerlimiet en regterlimiet elk ook nie na 'n vaste reële waarde streef nie, bestaan die linker- en regterlimiet in hierdie geval ook nie. Ons noem die vertikale lyn met vergelyking $x = 3$ 'n **vertikale asimptoot** van die funksie. Die limiet van 'n funksie in 'n bepaalde punt bestaan slegs as beide die linkerlimiet en die regterlimiet in daardie punt bestaan en dieselfde waarde besit. In hierdie geval het ons dat die funksiewaarde in die punt waar $x = 3$ nie bestaan nie en dat die limiet van die funksie wanneer x van albei kante streef na 3 ook nie bestaan nie. Hierdie spesiale sameloop van omstandighede impliseer dat die funksie f **diskontinu** (nie-aaneenlopend, met 'n sprong of onderbreking) is in die punt waar $x = 3$.

Vir duidelikheid toon ek hieronder 'n rekenaarvoorstelling van die funksie wat ons ondersoek het.



Voorbeeld 2

Beskou die funksie.

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 1 \\ 2, & x = 1 \\ x, & x > 1 \end{cases}$$

1. Bepaal $f(1)$, dit is die funksiewaarde in die punt waar $x = 1$.
2. Die funksiewaarde in die punt waar $x = 1$ gee egter geen inligting oor die gedrag van die funksie baie naby aan die punt waar $x = 1$ nie. Laat ons die gedrag van die funksie ondersoek in die omgewing van hierdie punt. Voltooi die volgende tabel.

As/if $x < 1$		As/if $x > 1$	
x	$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{as/if} \quad x < 1 \\ 2 & \text{as/if} \quad x = 1 \\ x & \text{as/if} \quad x > 1 \end{cases}$	x	$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{as/if} \quad x < 1 \\ 2 & \text{as/if} \quad x = 1 \\ x & \text{as/if} \quad x > 1 \end{cases}$
0		1,001	
0,5		1,01	
0,9		1,1	
0,99		1,5	
0,999		2	

2.1. Waarna streef die funksiewaarde wanneer x vanaf die linkerkant na 1 streef?

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

2.2. Waarna streef die funksiewaarde wanneer x vanaf die regterkant na 1 streef?

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

2.3. Hoe vergelyk die antwoorde van 2.1 en 2.2? $\lim_{x\to 1^-} f(x) \ldots\ldots \lim_{x\to 1^+} f(x)$

Wanneer die linkerlimiet en die regterlimiet van 'n funksie dieselfde waarde aanneem in 'n punt, dan sê ons die funksie het 'n limiet in daardie punt.

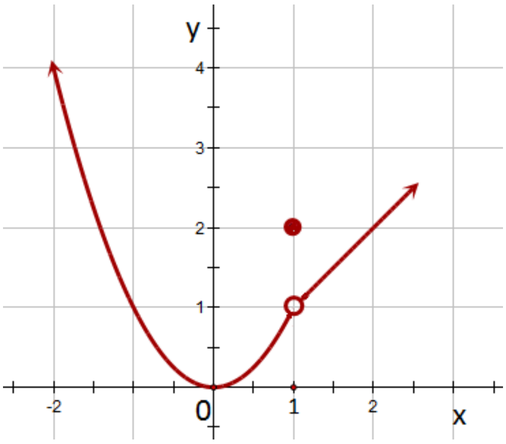
Omdat $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$ kan ons skryf $\lim_{x\to 1} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Die limiet van 'n funksie in 'n bepaalde punt bestaan slegs as beide die linkerlimiet en die regterlimiet in daardie punt bestaan en beide die linkerlimiet en die regterlimiet dieselfde waarde het. In hierdie geval het ons dat die funksiewaarde in die punt waar $x = 1$ en die limiet van die funksie wanneer x van albei kante streef na 1 verskillende waardes lewer.

$\lim_{x\to 1} f(x) \neq f(1)$

Hierdie spesiale sameloop van omstandighede impliseer dat die funksie f **diskontinu** is in die punt waar $x = 1$.

Vir duidelikheid toon ek hieronder 'n rekenaarvoorstelling van die funksie wat ons ondersoek het.



Voorbeeld 3

Beskou die funksie.

$$f(x) = \frac{8 - x^3}{2 - x}$$

1. Bepaal $f(2)$, dit is die funksiewaarde in die punt waar $x = 2$.
2. Die funksiewaarde in die punt waar $x = 2$ gee egter geen inligting oor die gedrag van die funksie baie naby aan die punt waar $x = 2$ nie. Laat ons die gedrag van die funksie ondersoek in die omgewing van hierdie punt. Voltooi die volgende tabel.

As/if $x < 2$		As/if $x > 2$	
x	$f(x) = \frac{8 - x^3}{2 - x}$	x	$f(x) = \frac{8 - x^3}{2 - x}$
1		2,001	
1,5		2,01	
1,9		2,1	
1,99		2,5	
1,999		3	

2.1. Waarna streef die funksiewaarde wanneer x vanaf die linkerkant na 2 streef?

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = ...$

2.2. Waarna streef die funksiewaarde wanneer x vanaf die regterkant na 2 streef?

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = ...$

2.3. Hoe vergelyk die antwoorde van 2.1 en 2.2? $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ .... $\lim_{x\to 2^+} f(x)$

Wanneer die linkerlimiet en die regterlimiet van 'n funksie dieselfde waarde aanneem in 'n punt, dan sê ons die funksie het 'n limiet in daardie punt.

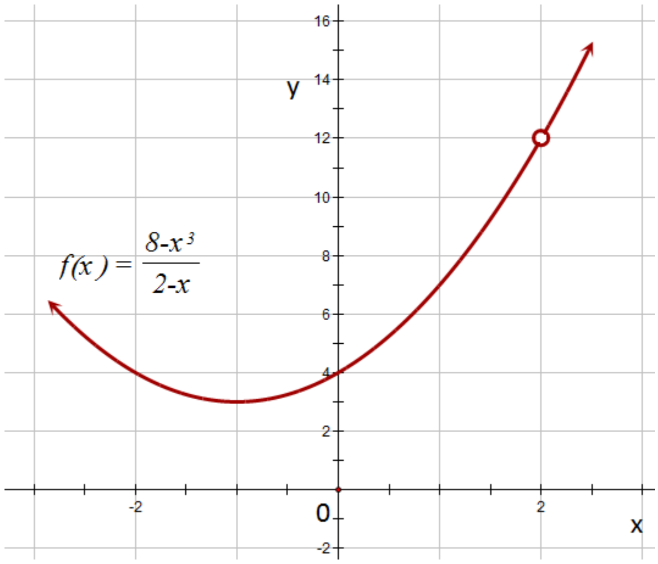
Omdat $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = ...$ kan ons skryf $\lim_{x\to 2} f(x) = ...$

Die limiet van 'n funksie in 'n bepaalde punt bestaan slegs as beide die linkerlimiet en die regterlimiet in daardie punt bestaan en beide die linkerlimiet en die regterlimiet dieselfde waarde het. **LET DAAROP dat die funksie nie in daardie punt gedefinieer hoef te wees nie. Die limiet bestaan in elk geval as beide die linkerlimiet en die regterlimiet dieselfde waarde het.** In hierdie geval het ons dat die funksiewaarde in die punt waar $x = 2$ en die limiet van die funksie wanneer x van albei kante streef na 2 nie dieselfde waarde lewer. **In teendeel, die funksiewaarde bestaan nie.**

$\lim_{x\to 2} f(x) \neq f(2)$

Hierdie spesiale sameloop van omstandighede impliseer dat die funksie f **kontinu** (aaneenlopend, sonder spronge of onderbrekings) is in die punt waar $x = 2$.

Vir duidelikheid toon ek hieronder 'n rekenaarvoorstelling van die funksie wat ons ondersoek het.



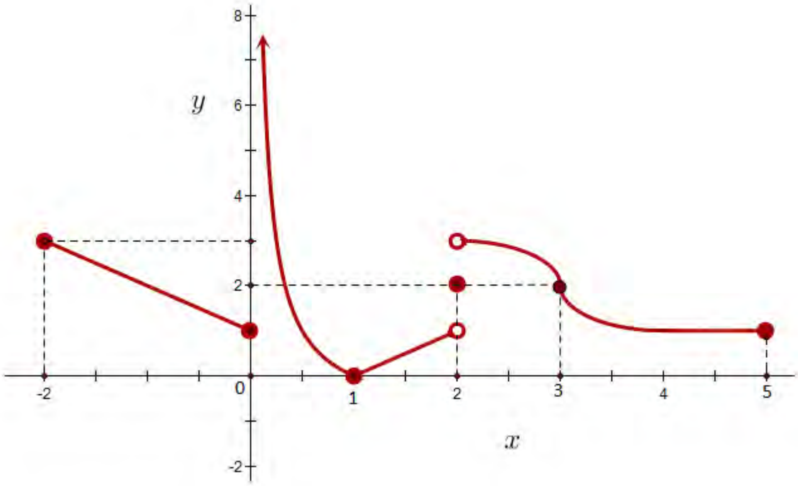
Let egter daarop dat die limiet van hierdie funksie ook soos volg verkry kan word.

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 2} \frac{8-x^3}{2-x} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{(2-x)(4+2x+x^2)}{2-x} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{\cancel{(2-x)}(4+2x+x^2)}{\cancel{(2-x)}} \\
&= \lim_{x\to 2} (4+2x+x^2) \\
&= 4+2(2)+2^2 \\
&= 12
\end{aligned}$$

Hierdie tipe limiet, **waar die noemer wat nul sou word tydens direkte vervanging verwyder kan word deur faktorisering en deling**, word 'n **verwyderbare diskontinuïteit** genoem. Hulle word gekenmerk deur dat die vorm $\frac{0}{0}$ ontstaan wanneer die waarde waarheen die onafhanklike veranderlike streef, direk in vervang word. Die uitdeelbewerking is toelaatbaar, aangesien die noemer streef na nul, maar nie nul word nie.

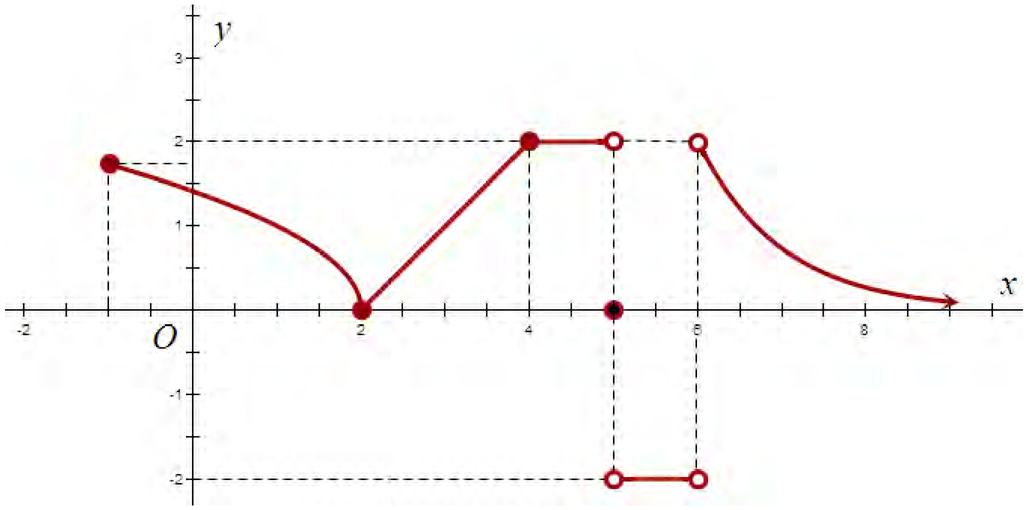
Oefening 6.1

1. Beskou die stuksgewyse funksie f.



Noem vier punte waar f diskontinu is. Skryf net die x-koördinate van die punte neer asook die rede waarom f by daardie punt nie kontinu is nie.

2. Beskou die stuksgewyse funksie g.



Noem drie punte waar g diskontinu is. Skryf net die x-koördinate van die punte neer asook die rede waarom g by daardie punt nie kontinu is nie.

3. Gebruik die voorwaardes van kontinuïteit om aan te toon dat die volgende funksie kontinu is by die gegewe punt.

$$g(t) = \frac{t-3}{9t}, t = -3$$

6.2 Berekening van sekere limiete

Direkte metode vir die berekening van limiete kom daarop neer dat ons 'n tabelmetode vermy en eerder direkte vervanging probeer. Wanneer direkte vervanging nie werk nie, toets ons of ons een van die volgende twee spesiale soort limiete het.

Die spesiale geval $\frac{0}{0}$

Ons het hierdie soort aan die einde van Leergedeelte 6.1 teëgekom.

Voorbeeld

Bereken die limiet

$$\lim_{p \to -5} \frac{p^2 - 25}{p+5}$$

Oplossing

$$\lim_{p\to -5}\frac{p^2-25}{p+5} \qquad \text{vervanging lewer / } \textit{substitution yield} \quad \frac{(-5)^2-25}{-5+5}=\frac{0}{0}$$

$$= \lim_{p\to -5}\frac{(p-5)\cancel{(p+5)}}{\cancel{(p+5)}}$$

$$= \lim_{p\to -5}(p-5)$$

$$= -5-5$$

$$= -10$$

Die spesiale geval $\frac{\infty}{\infty}$

By hierdie soort deel ons in elke term deur die hoogste mag van die veranderlike wat voorkom.

Voorbeeld

Bereken die limiet.

$$\lim_{t\to\infty}\frac{t^2}{t^2-1}$$

Oplossing

$$\lim_{t\to\infty}\frac{t^2}{t^2-1} \qquad \text{vervanging lewer / } \textit{substitution yield} \quad \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{t\to\infty}\frac{\left(\frac{t^2}{t^2}\right)}{\left(\frac{t^2}{t^2}-\frac{1}{t^2}\right)}$$

$$= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{t^2}\right)} \qquad \text{maar/ } \textit{but } \frac{1}{t^n}\to 0 \text{ as / } \textit{if} \quad t\to\infty \text{ en / } \textit{and } n>0$$

$$= \frac{1}{(1-0)}$$

$$= 1$$

Oefening 6.2

Bereken die limiete direk (geen tabel).

1. $\lim_{x\to 0}\frac{10x^2}{x}$
2. $\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x+1}$
3. $\lim_{t\to 3}\frac{t^2-5t+6}{t-3}$
4. $\lim_{k\to -4}\frac{64+k^3}{4+k}$
5. $\lim_{x\to\infty}\frac{10x^2}{x}$
6. $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-5x+7}{2x^2-x}$
7. $\lim_{t\to\infty}\frac{2t+5}{3t+2}$
8. $\lim_{m\to\infty}\frac{m^3-27}{m-3}$

7 Inleiding tot funksie-analise

Voorkennis uit Leereenheid 3 wat vir hierdie leereenheid benodig word:

U behoort reeds uit u skoolkennis of uit die hersiening wat ons in Leereenheid 3 gedoen het, die volgende te kan doen:

1. Die formele definisie van ‘n funksie as ‘n spesiale relasie kan toepas
2. Die definisie- en waardeversameling van ‘n funksie kan identifiseer
3. Die inverse van ‘n gegewe funksie kan bepaal
4. Bewerkings met funksies kan uitvoer

Blaai gerus terug indien nodig.

Leerdoelstellings vir hierdie leereenheid

Na afhandeling van hierdie leereenheid moet die student in staat wees om die volgende te doen:

1. Die afgeleide van 'n funksie te bereken deur gebruik te maak van die definisie van 'n afgeleide in terme van die limiet van die gradiënt van die snylyn deur 'n kromme wanneer die afstand tussen die snypunte infinitesimaal word:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

2. Te bepaal of 'n funksie differensieerbaar is in 'n punt of nie, deur van die gradiënt van die raaklyn aan 'n kromme gebruik te maak
3. Differensiasiereëls toe te pas om die afgeleide van sekere enkelvoudige funksies te bereken
4. Die afgeleide van saamgestelde funksies te bereken
5. Differensiasie toe te pas om 'n verskeidenheid funksies kan teken en ontleed

7.1 Die afgeleide van ’n funksie uit eerste beginsels

Die gradiënt van die snylyn deur ‘n kromme as die gemiddelde veranderingstempo van ‘n funksie.

Gestel 'n funksie is gedefinieer as $f(x) = 3x^2 + 45$. Beskou twee punte A en B op die kromme van die funksie sodat A by $x = 3$ en B by $x = 6$ geleë is.

1. Bereken die koördinate van A en B.
2. Bereken nou die gradiënt van die snylyn AB.

Let op dat die gradiënt van die snylyn AB eintlik meet "hoe vinnig" die funksiewaarde op hierdie interval $[3{,}6]$ verander. Omdat die interval lank is, noem ons die gradiënt van die snylyn die "gemiddelde veranderingstempo van die funksiewaardes met betrekking tot die onafhanklike veranderlike". Dit is wat ons bedoel met die simbool

$$m_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Die gradiënt van die raaklyn aan ‘n kromme as die oombliklike veranderingstempo van ‘n funksie

Gestel 'n funksie is gedefinieer as $f(x) = 3x^2 + 45$. Beskou twee punte A en B op die kromme van die funksie sodat A by $x = 3$ en B by $x = 3 + h$ regs van A geleë is.

1. Bereken die koördinate van A en B.
2. Bereken nou die gradiënt van die snylyn AB in terme van h.

Gestel nou ons maak die waarde van h baie klein, sodat die punt B geweldig naby aan die punt A kom. Dan sal die snylyn AB al hoe meer soos 'n raaklyn aan die kromme by A begin lyk.

$$m_{AB} \to m_{\text{raaklyn by A}} \text{ as } h \to 0$$

Dus kan ons die naderskuif van B na A ten einde die snylyn AB in 'n raaklyn te verander, formuleer as

$$m_{\text{raaklyn by A}} = \lim_{h\to 0} m_{AB}.$$

In terme van ons gewone notasie

$$\begin{aligned} m_{raaklyn\ by\ A} &= \lim_{h\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{3+h-3} \end{aligned}$$

Let daarop dat u nou net hierbo vir $\frac{f(3+h)-f(3)}{3+h-3}$ in terme van h bereken het. Al wat u nou hoef te doen om die gradiënt van die raaklyn by A te kry, is om die waarde van h infinitesimaal (oneindig klein) te laat word. Die waarde wat u pas verkry het, gee die gradiënt van die raaklyn aan die kromme by die punt A, dit is waar $x = 3$. Aangesien die interval waaroor die gradiënt van die raaklyn bereken is, dit is die grootte van h, infinitesimaal is meet die gradiënt van die raaklyn dus die oombliklike veranderingstempo van die funksiewaarde met betrekking tot die onafhanklike veranderlike. Ons dui die oombliklike veranderingstempo, dit is die gradiënt van die raaklyn, aan met die simbool $\frac{dy}{dx}$ en noem dit die afgeleide van die funksie.

Voorbeeld

Bepaal die afgeleide van die funksie $f(t) = 4t^3 - 2t^2$ uit eerste beginsels.

Oplossing

Beskou punte $A(t, 4t^3 - 2t^2)$ en $B(t+h, 4(t+h)^3 - 2(t+h)^2)$ op die kromme van f.

Die twee punte is dus

$$A(t, 4t^3 - 2t^2)$$

en

$$B(t+h, 4t^3 + 12ht^2 + 12h^{2t} + 4h^3 - 2t^2 - 4ht - 2h^2).$$

$$\begin{aligned} \text{Slope of secant } AB \quad &= \frac{\Delta f}{\Delta t} \\ &= \frac{f_2 - f_1}{t_2 - t_1} \\ &= \frac{4t^3 + 12ht^2 + 12h^2t + 4h^3 - 2t^2 - 4ht - 2h^2 - \left(4t^3 - 2t^2\right)}{t+h-t} \\ &= \frac{4t^3 + 12ht^2 + 12h^2t + 4h^3 - 2t^2 - 4ht - 2h^2 - 4t^3 + 2t^2}{h} \\ &= \frac{12ht^2 + 12h^2t + 4h^3 - 4ht - 2h^2}{h} \\ &= \frac{h\left(12t^2 + 12ht + 4h^2 - 4t - 2h\right)}{h} \\ &= 12t^2 + 12ht + 4h^2 - 4t - 2h \end{aligned}$$

Laat B na A beweeg deur h baie klein te maak/ *Let B move to A by making h very small* :

$$\begin{aligned} \text{Slope of tangent at A} \quad &= \lim_{h\to 0}\left(\text{ Slope of secant } AB\right) \\ &= \lim_{h\to 0}\left(12t^2 + 12ht + 4h^2 - 4t - 2h\right) \\ &= 12t^2 + 0 + 0 - 4t - 0 \\ &= 12t^2 - 4t \end{aligned}$$

Let daarop dat sommige wiskundiges verkies om die berekening vanuit eerste beginsels effens meer kompak te doen.

Voorbeeld

Bepaal die afgeleide van die funksie $y = \sqrt{x}$ uit eerste beginsels.

Oplossing

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\left(\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\times 1\right) \\
&= \lim_{h\to 0}\left(\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\times\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}\right) \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x+0}+\sqrt{x}} \\
\therefore \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{2\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

Oefening 7.1

Bereken die afgeleides van die volgende vanuit eerste beginsels.

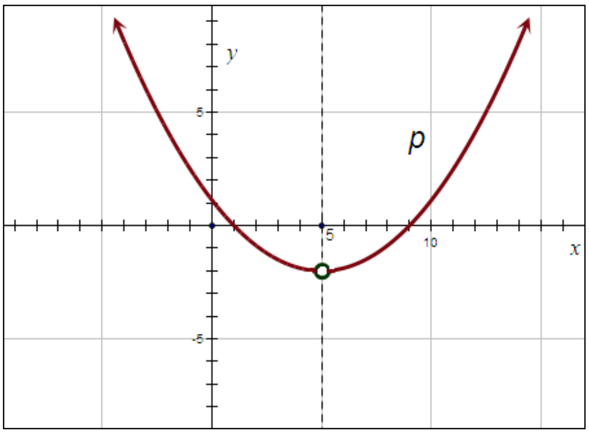
1. $g(t) = \frac{3}{\sqrt{t}}$
2. $s(t) = \frac{2t-3}{3t+2}$
3. $f(x) = 3x^2 - 3x + 4$
4. $f(x) = \sin x$. Gebruik $\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = 1$ en $\lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h} = 0$.
5. $f(x) = \cos x$. Gebruik $\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = 1$ en $\lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h} = 0$.
6. $g(p) = |2p|$

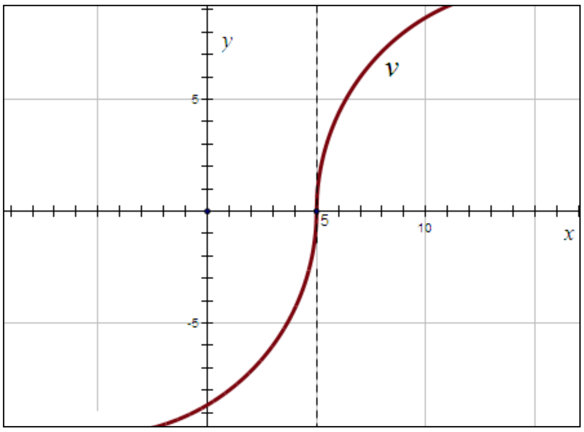
7.2 Differensieerbaarheid

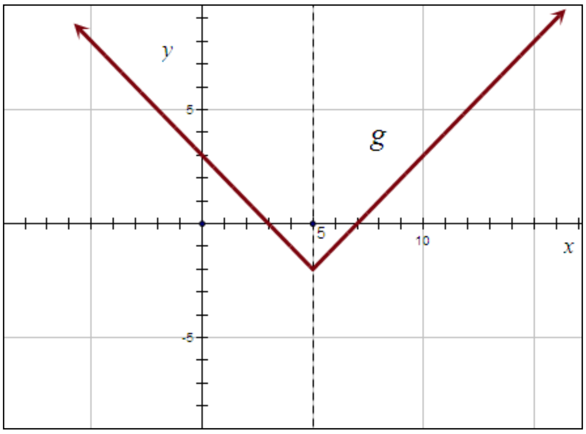
Uit die vorige Leergedeelte volg dat die konsep van 'n afgeleide onlosmaakbaar deel is van die konsep van 'n raaklyn. Daarom kan ons differensieerbaarheid beskou as 'n eienskap wat beteken dat indien 'n funksie differensieerbaar is op 'n oop interval, dan is dit by elke punt in daardie oop interval moontlik om 'n unieke raaklyn met 'n reëlwaardige gradiënt aan die funksie te trek. Dit kom in beginsel daarop neer dat 'n funksie differensieerbaar is waar dit kontinu en glad is. 'n Funksie is dus nie-differensieerbaar waar dit 'n skerppunt (knakpunt) vertoon, diskontinu is of vertikaal loop.

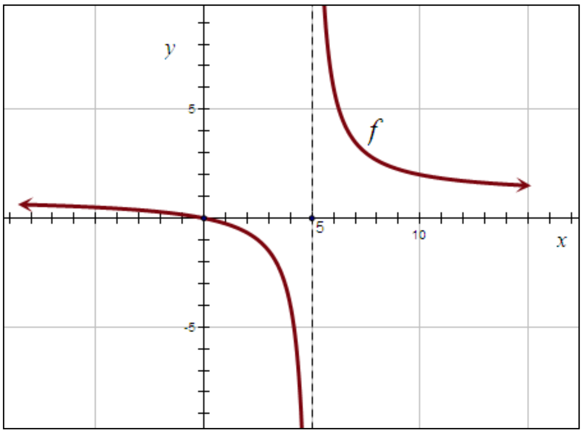
Oefening 7.2

Ondersoek al die voorwaardes vir die differensieerbaarheid en spesifiseer watter van die voorwaardes verbreek word by elkeen van die onderstaande gevalle.

1. 

2. 

3. 

4. 

7.3 Differensiasiereëls

In Leergedeelte 7.1 het ons beleef dat differensiasie vanuit eerste beginsels 'n omslagtige proses is. Gelukkig word gerieflike differensiasiereëls maklik afgelei deur die definisie van 'n afgeleide op 'n verskeidenheid funksies toe te pas. U sal sommige van hierdie differensiasiereëls nog self bewys; vir vandag aanvaar ons die volgende differensiasiereëls sonder bewys.

Let op dat die notasie D_x beteken $\frac{dy}{dx} = f'(x)$.

Konstantes: $D_x(\text{konstante}) = 0$

Optelling: $D_x[f(x) + g(x)] = D_x f(x) + D_x g(x)$

Aftrekking: $D_x[f(x) + g(x)] = D_x f(x) + D_x g(x)$

Skalaarvermenigvuldiging: $D_x[c\, f(x)] = c\, D_x f(x)$

Magsfunksie: $D_x x^n = n\, x^{n-1}, n \in \mathbb{R}$

Produkreël: $D_x[f(x)g(x)] = g(x)D_x f(x) + f(x)D_x g(x)$

Kwosiëntreël: $D_x \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x)D_x f(x) - f(x)D_x g(x)}{[g(x)]^2}$, $g(x) \neq 0$.

Kettingreël: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv}\frac{dv}{du}\frac{du}{dx}$ met $y = f(v)$, $v = g(u)$ en $u = h(x)$ of $D_v f(v) D_u g(u) D_x h(x)$

Trigonometriese funksies: $D_x \sin x = \cos x$, $D_x \cos x = -\sin x$, $D_x \tan x = \sec^2 x$, $D_x \csc x = -\csc x \cot x$, $D_x \sec x = \sec x \tan x$, $D_x \cot x = -\csc^2 x$

Eksponensiële funksies: $D_x e^x = e^x$, $D_x a^x = a^x \ln a$

Logaritmiese funksies: $D_x \ln x = \frac{1}{x}$, $D_x \log_a x = \frac{1}{x \ln a}$

Absolute waarde funksie: $D_x|x| = \frac{x}{|x|}$

Laat ons nou ondersoek hoe hulle gebruik word.

Oefening 7.3

Bereken die afgeleides in elkeen van die volgende gevalle deur van differensiasiereëls gebruik te maak.

1. Bepaal die gemiddelde gradiënt van $f(x) = x^2 + 2$ tussen $x = 3$ en $x = 5$.
2. As $f(x) = 3x^2 + 2$, bepaal die helling van raaklyn aan die kromme f by die punt $x = -2$.
3. Differensieer met betrekking tot x.

   3.1. $f(x) = 4x^3 + x\sqrt{x} - \frac{5}{x^4}$

   3.2. $f(x) = (x^2 + 6x)(x^3 - 6x^2)$ op twee verskillende maniere.

   3.3. $f(x) = \frac{x^2+3}{5}$

   3.4. $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

7.4 Saamgestelde funksie en die kettingreël

Hersien eers Leergedeelte 3.5.

Die kettingreël word gegee as $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$ waar $y = f(u)$ en $u = g(x)$ of $(f \circ g)'(x) = f'\big(g(x)\big)g'(x)$.

Voorbeeld

$h(x) = \cos(x^2 - x + 1)$ met $y = \cos u$ en $u = x^2 - x + 1$

sodat $\frac{dh}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = -\sin x \cdot (2x - 1) = -\sin(x^2 - x + 1) \cdot (2x - 1)$.

Of $h(x) = \cos(x^2 - x + 1)$ met $f\big(g(x)\big) = \cos\big(g(x)\big)$ en $g(x) = x^2 - x + 1$

sodat $h'(x) = f'\big(g(x)\big)g'(x) = -\sin(x^2 - x + 1) \cdot (2x - 1)$.

Oefening 7.4

1. Bereken die afgeleides van die volgende funksies.
   1.1. $f(x) = \sqrt{3x-2}$
   1.2. $g(x) = \frac{1}{(x^2-1)^2}$
   1.3. $h(x) = (x^3 - x^2 + x + 1)^5$
   1.4. $j(x) = \sqrt[4]{4x^2 - 6x}$
   1.5. $k(x) = (2x^2 + 4x)^{100}$
   1.6. $m(x) = \cos^2 x$
2. Die volume van 'n kubus word deur die formule $V(x) = x^3$ gegee. Gestel die sylengte x van die kubus, gemeet in mm, neem af volgens die formule $x(t) = \frac{3}{10}t^2 - 6t + 30$ waar t in minute gemeet word. Bepaal die veranderingstempo van volume met tyd, gemeet in mm³/min, wanneer $t = 5$ minute.
3. Die oppervlakte A van 'n olie-kol wat weens die storting van olie uit 'n beskadigde tenkskip op die see dryf, word met 'n sirkel benader, dit wil sê $A(r) = \pi r^2$. Die radius $r(t) = -\frac{t^2}{5} + 4t,\ 0 \leq t \leq 10$, met r in km en t in uur, van die sirkel groei namate die olie versprei sodat die radius van die kol na 10 uur 20 km is.
   3.1. Bereken die tempo waarteen die radius toeneem na 5 ure.
   3.2. Bereken die oppervlakte van die oliekol op die tydstip wanneer die radius toeneem teen 1.2 km/uur.

7.5 Toepassing van differensiasie

Analise is een van die kragtigste gereedskapstukke wat die mens nog ontwikkel het. Alhoewel u nog net van differensiasie kennis dra, kan u alreeds 'n groot verskeidenheid werklikheidsgetroue situasies wat met veranderingstempo te doen het, wiskundig hanteer. Binnekort sal u ook met integrasie kennis maak.

Oefening 7.5

1. Die wiskunde van vraag en aanbod

   Gestel die vraag na 'n handelaar se produk word gegee deur die funksie $q = 8000 - 40p$, met q die aantal eenhede per week wat deur verbruikers aangevra word as die prys per eenheid p rand is. Die kostefunksie vir die vervaardiging van die produk word gegee deur $C = 100000 + 20q$.

   1.1. Bepaal die prys en hoeveelheid by die gelykbreekpunte, d.w.s. die punt(e) waar geen wins gemaak word nie.
   1.2. Bepaal die produksievlak wat 'n maksimum inkomste sal lewer.
   1.3. Bepaal die prys per eenheid wat 'n maksimum inkomste sal lewer.
   1.4. Wat is die maksimum inkomste?
   1.5. Bepaal die produksievlak wat 'n maksimum sal wins lewer.
   1.6. Bepaal die prys per eenheid wat 'n maksimum sal wins lewer.
   1.7. Wat is die maksimum wins?
2. Finansiële risiko

   'n Ekonoom moet 'n moontlike sakegeleentheid ontleed. Die persoon stel voor dat die verwagte wins (P) in rand as 'n funksie van die tyd (t) in maande gegee word deur $P = 10000 + 30t^2 - \frac{2}{3}t^3$.

   2.1. In watter maand(e), indien enige, sal die tempo van groei in wins nul wees?
   2.2. In watter maand sal die tempo van groei in wins die vinnigste wees?
   2.3. Wat is die hoogste groeikoers wat die onderneming sal bereik?
   2.4. Wat is die hoogste wins wat die onderneming vir enige maand sal bereik?

3. Veranderingstempo

Die temperatuur van ‘n mengsel in ‘n fabriek verander volgens die funksie $T(t) = -\frac{t^2}{4} + \frac{5t}{2} + \frac{375}{4}$ vir $0 \leq t \leq 25$ met T in °C en t in minute.

3.1. Differensieer $T(t)$ deur differensiasiereëls te gebruik.

3.2. Bereken $\left.\frac{dT}{dt}\right|_{t=5}$ en maak ‘n afleiding uit die antwoord. (Wat impliseer die antwoord?)

3.3. Bereken die temperatuur op die oomblik wanneer die temperatuur veranderingstempo -7.5℃/minuut is.

4. Skets van krommes

4.1. Gegee $f(x) = x^3 - 4x^2 - 11x + 30$. A en B is die draaipunte van die gegewe funksie.

4.1.1. Skets die grafieke van $f(x)$, $f'(x)$ and $f''(x)$ op dieselfde stel asse. Toon die koördinate van die draaipunte (A en B) asook die infleksiepunt aan.

4.1.2. Wat word bedoel met die begrip "infleksiepunt"?

4.1.3. Wat is die gemiddelde veranderingstempo van die funksie vanaf A na B?

4.1.4. Bereken die vergelyking van die raaklyn aan die kromme by $x = 1$.

4.2. Gegee $H(x) = -x^3 + 5x^2 + 8x - 12 = (x-1)(-x^2 + 4x + 12)$.

4.2.1. Bepaal die koördinate van die kritieke punte.

4.2.2. Pas die eerste afgeleide toets en die tweede-afgeleide-toets toe om te toon by watter van die kritieke punte is lokale minima of lokale maksima.

4.2.3. Bepaal die koördinate van die punte waar die konkawiteit verander.

4.2.4. Pas die tweede afgeleide toets toe om te toon dat die konkawiteit verander het.

4.3. Gegee $g(x) = \frac{2x+6}{-6x+3}$.

4.3.1. Bepaal die vertikale en horisontale asimptote deur van limiete gebruik te maak.

4.3.2. Bepaal al die afsnitte met die asse.

4.3.3. Skets die grafiek van die funksie. Toon alle inligting aan wat u bepaal het in die vorige twee vrae.

5. Optimalisering

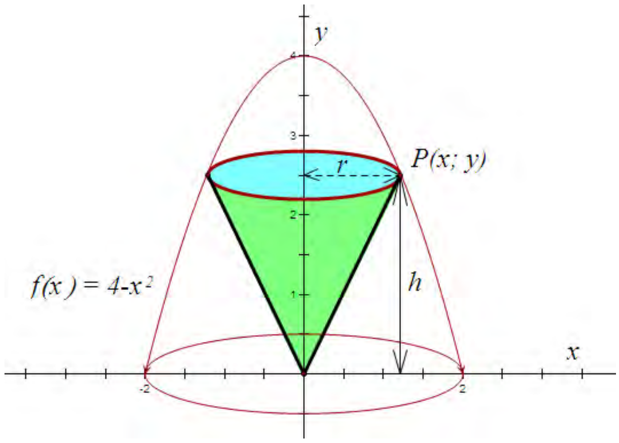
5.1. ‘n Oop karton krat word vervaardig deur vier identiese vierkante uit die hoeke van ‘n vel karton wat 24 cm lank en 18 cm breed is, te sny en die oorblywende gedeeltes na bo te vou om die wande van die krat te vorm.

5.1.1. Toon aan dat die volume van die karton krat gegee word deur die vergelyking $V(x) = 4x^3 - 84x^2 + 432x$ vir $x \in [0,9]$.

5.1.2. Skets ‘n netjiese grafiek van die funksie V teenoor x vir $-2 \leq x \leq 14$. Toon alle snypunte met asse, asook draaipunte en infleksiepunte, duidelik aan in koördinaatvorm.

5.1.3. Wat moet die oppervlakte van elke vierkant wees sodat die volume van die krat ‘n maksimum sal wees en wat is die waarde van hierdie maksimum volume?

5.2. ‘n Regte kegel word gegenereer deur die deel van die parabool $y = 4 - x^2$ tussen die punte $x = 0$ en $x = 2$ om die Y-as te roteer en die kegel in die paraboloïed in te skryf sodat die tophoek op die oorsprong staan en die basis by die punt P aan die parabool raak. Aanvaar alle afmetings is in cm.



5.2.1. Toon aan dat die volume van die kegel gegee word deur die funksie $V(x) = \frac{4}{3}\pi x^3 - \frac{1}{3}\pi x^4$.

5.2.2. Skets die kromme van V teenoor x. Neem alle beperkings op die definisieversameling in ag. Toon alle wortels, draaipunte en infleksiepunte binne die beperkte definisieversameling.

5.2.3. Maak van u berekeninge en resultate uit die vorige vraag gebruik en bereken die maksimum moontlike volume wat die kegel kan besit.

Antwoorde vir oefeninge

1 Logika, algebraïese vaardighede en eksponente

Oefening 1.1

1.1. Faktoriseer, $(2x-3)(2-x)$; Vierkantsvoltooiing, $-2\left(x-\frac{7}{4}\right)^2+\frac{1}{8}$
1.2. Vereenvoudig, p^3-8; Bepaal die waarde indien $p=1$, -7
1.3. Los die vergelyking op, $t=\pm 2$; Bepaal die waardes waarvoor die vergelyking nie geldig is nie, $t\in(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,\infty)$
1.4. Los die vergelyking op, $k=0,\frac{7}{5},-\frac{2}{3}$; Stel oplossings grafies voor. Teken die funksie $f(k)=30k^3-22k^2-28k$ en dui die afsnitte op die horisontale as aan.
1.5. Bepaal $f(2)$, $6\sqrt{2}+\frac{37}{2}$; Bepaal $f'(x)$, $\frac{3}{\sqrt{x}}+\frac{3}{x^2}+10x$
1.6. Bepaal die wortels van $P(x)$, $x=-2{,}3{,}5$; Bepaal $P'(x)$, $3x^2-12x-1$
1.7. Los die vergelyking op, $x=-2{,}3{,}5$; Bepaal die ander faktore van die uitdrukking, $x-3$ en $x-5$
1.8. Bewys die identiteit; Vir watter waardes is die identiteit geldig? $\theta\in[90°k,90°(k+1)]$, $k=0,\pm 2,\pm 4,\ldots$
1.9. Bepaal die waarde van x, $x=2$ of $x=3$; Bepaal die waarde van α; $\alpha=36.87°$ of $\alpha=53.13°$
2. Wenk: $x=2r$
3. Wenk: $x^2+x^2=(2r)^2$
4. Wenk: $x=2r$
5. Wenk: $x^2+x^2=l^2$, $(2r)^2=x^2+l^2$

Oefening 1.2

1.1. 34
1.2. -18
1.3. -2
1.4. -90
2.1. 0
2.2. Ongedefinieerd
2.3. Ongedefinieerd
2.4. -21

Oefening 1.3

1.1. $4a^4+16a^3b+20a^2b^2+16ab^3+4b^3$
1.2. $-\frac{729}{8}x^6$
1.3. z^{-7}
1.4. p^3-m^3
1.5. $8x^3+27y^3$
1.6. $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
1.7. $t^{-2}+t^{-3}$
1.8. $\frac{2}{5}r$
1.9. $3^{-4}=\frac{1}{81}$
1.10. $\frac{3}{2}$
2.1. $g'(t)=\frac{3}{2}t^{-\frac{1}{2}}-\frac{2}{5}t^{-2}=\frac{3}{2\sqrt{t}}-\frac{2}{5t^2}$
2.2. $g'(t)=\frac{8}{3}t^{-\frac{1}{3}}+\frac{10}{3}t^{-3}-\frac{1}{3}t^{-\frac{3}{2}}=\frac{8}{3\sqrt[3]{t}}+\frac{10}{3t^3}-\frac{1}{3\sqrt{t^3}}$
3. $20^{x-1}+10^y$

Oefening 1.4

1.1. $y=\frac{7}{8}$
1.2. $p=6\frac{1}{4}$
1.3. $x=-2$

1.4. $x = -1$, $2^x > 0$
1.5. $r = -\frac{3}{2}$, die onbekende is in die grondtal posisie.

Oefening 1.5

1. Gebruik grafiese sagteware om die sketse te teken byvoorbeeld, desmos.
2. $3e^2 + 2 \approx 24.1672$

2 Logaritmes

Oefening 2.1

1.1. 3
1.2. 0
1.3. 2
1.4. 15
1.5. 0
1.6. 6
1.7. x
1.8. -1
2.1. 81
2.2. 2
2.3. -1/3
2.4. 1

Oefening 2.2

1.1. $t = 10$
1.2. $n = 8$
1.3. $t \approx 3.2375$
1.4. $n \approx 0.08481$
2.1. Vir ‘n kwadratiese funksie sal die verskil van die verskil in opeenvolgende datapunte konstant wees.
2.2. $k = \frac{\ln 4}{7} \approx 0.198$, $A = e^{-\frac{2\ln 4}{7}} \approx 0.673$
2.3. $P(46) = 6075.32$
2.4. Maart 2016
3.1. $k = \frac{\ln 2}{138.376} \approx \frac{1}{200} = 0.005$
3.2. $\frac{1}{k} = 200$
3.3. 2.92 kg
3.4. $200 \ln 8 \approx 415.88$ dae

3 Inleiding tot funksies

Oefening 3.1

1. Definisieversameling, horisontale, afhanklike veranderlike, 8, 4, 2, 1.75, 4, 14
2. Slegs die data as punte op die grafiek.
3. Verbind die punte.
4. $g(t) = t^2 - t + 2$
5. $x < 0.5$ dalend, $x > 0.5$ stygend, konkawiteit opwaarts, minimum draaipunt by $(0.5, 3.75)$
6. $D_g = \{x| -2 \leq x \leq 4; x \in \mathbb{R}\}$
7. $W_g = \{y|1.75 \leq y \leq 14; y \in \mathbb{R}\}$
8. Verleng die parabool na links en regs.
9. $g(-1.5) = 5.75$, $g(1.5) = 2.75$, $g(5) = 22$, $g(2 + h) = h^2 + 3h + 4$
10. Gebruik gidslyne op die grafiek.
11. $t = 0.5 + 0.5\sqrt{21} \approx 2.79$
12. Gebruik gidslyne op die grafiek.

13.1. A, C
13.2. C

14.1. $\{(-1,-1),(0,0),(1,1),(2,2),(3,3)\}$
14.2. $\{(-1,1),(0,0),(1,1),(2,4),(3,9)\}$
15. $\{(-1,-1),(0,0),(1,1),(2,2),(3,3)\}$ een-tot-een-funksie, $\{(-1,1),(0,0),(1,1),(2,4),(3,9)\}$ nie een-tot-een funksie
16. Gebruik grafiese sagteware, byvoorbeeld desmos, om jou grafieke te kontroleer.

Oefening 3.2

1. $s(0) = 3$, $s(1) = 3$, $s(t+h) = 3$
2. $T_1 = 3.5$, $T_4 = \frac{7}{16}$
3. $g(0)$ is ongedefinieerd, $g(t) = \frac{3}{2t}$, $g\left(\frac{2}{3}\right) = 2.25$

Oefening 3.3

1. $f^{-1}(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$, alle definiesie- en waardeversamelings is die versameling van reële getalle.
2. $f^{-1}(x) = x^2 + 1, x \geq 0$ omdat $y = f(x) \geq 0$. $D_f = [1,\infty)$, $W_f = [0,\infty)$, $D_{f^{-1}} = [0,\infty)$, $W_{f^{-1}} = [1,\infty)$

Oefening 3.4

1.1. $2x^2 + 3x + 5$
1.2. $2x^2 + 3x + 5$
1.3. $2x^2 - 3x - 5$
1.4. $-2x^2 + 3x + 5$
1.5. $6x^3 + 10x^2$
1.6. $6x^3 + 10x^2$
1.7. $\frac{2x^2}{3x+5}, x \neq -\frac{5}{3}$
1.8. $\frac{3x+5}{2x^2}, x \neq 0$
2. Optelling van funksies en vermenigvuldiging van funksies
3.1. 24
3.2. 72
3.3. $a[f(x)] \neq f(ax)$
4.1. 1250
4.2. 674
4.3. $g(a+x) \neq g(a) + g(x)$
5. $\sin x$ en $\sin 4x$ het 'n amplitude van 1, terwyl $4\sin x$ 'n amplitude van 4 het. $\sin x$ en $4\sin x$ het 'n periode van $360°$, terwyl $\sin 4x$ 'n periode van $90°$ het.

Oefening 3.5

1.1. $v\big(u(t)\big) = \sqrt[3]{\sin t}$
1.2. $u\big(v(t)\big) = \sin\sqrt[3]{t}$
2.1. $v\big(u(t)\big) = \frac{2-2t}{4-t}, t \neq 4\ (u(t) \neq -1)$
2.2. $u\big(v(t)\big) = \frac{3+3t}{t-1}, t \neq 1\ (v(t) \neq 1)$

4 Radiaalmaat en trigonometrie

Oefening 4.1

$$\frac{\pi}{6}, 45, 60, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, 135, \frac{5\pi}{6}, \pi, 210, \frac{5\pi}{4}, 240, \frac{3\pi}{2}, 300, \frac{7\pi}{4}, \frac{11\pi}{6}$$

Oefening 4.2

1. $159°$
2. $2x$
3. $171.887339°$

Oefening 4.3

1. 10.908 m^2

2. 50% afneem (halveer)
3. 100% toeneem (verdubbel)
4. 7 m

Oefening 4.4

1.1. 3
1.2. $5+\frac{\sqrt{3}}{2}$
1.3. 2
1.4. 5
1.5. $-\frac{2}{3}$
1.6. 1
1.7. 1
1.8. 1
2.1. $LK=\csc^2\theta=c^2/b^2$, $RK=\cot^2\theta+1=\frac{a^2}{b^2}+1=\frac{a^2+b^2}{b^2}=\frac{c^2}{b^2}$ sodat $LK=RK$.
2.2. Soortgelyk aan 2.1
2.3. Soortgelyk aan 2.1
3.1. 1
3.2. $\begin{cases} 1, \cos\theta>0 \\ -1, \cos\theta<0 \end{cases}$
3.3. -1
4. Gebruik grafiese sagteware, byvoorbeeld desmos, om jou grafieke te kontroleer.
5.1. $\frac{7\pi}{6},\frac{11\pi}{6}$
5.2. $\frac{\pi}{6},\frac{11\pi}{6}$
5.3. $\frac{5\pi}{6},\frac{11\pi}{6}$
5.4. $\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3},\frac{5\pi}{3}$
5.5. $\frac{2\pi}{3},\frac{5\pi}{6},\frac{5\pi}{3},\frac{11\pi}{6}$
6.1. $x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}$, $x=\frac{7\pi}{12}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$
6.2. $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

Oefening 4.5

1.1. $\frac{33}{65}$
1.2. $-\frac{16}{65}$
1.3. $\frac{33}{56}$
2. $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$
3. Bewys
4. 0
5. 1

Oefening 4.6

Bewys van identiteite

Oefening 4.7

1. 4470.6 cm^2
2. 1.1522 myl
3. 47.55 seemyl, N 84.6^o O

4.1.1. $y=\sin(2x\pm\pi)+1$
4.1.2. $y=\sin\left[2\left(x\pm\frac{\pi}{2}\right)\right]+1$
4.1.3. $y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)+1$, $y=\cos\left(2x-\frac{3\pi}{2}\right)+1$
4.1.4. $y=\cos\left[2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]+1$, $y=\cos\left[2\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)\right]+1$

4.2. Nie een van die twee nie.
4.3.1. Onewe
4.3.2. Nie een van die twee nie.
4.3.3. Ewe
5.1. 10 min^{-1}
5.2. 0.1 min
5.3. 8.2 m
5.4. Gebruik grafiese sagteware, byvoorbeeld desmos, om jou grafiek te kontroleer.
6.1. 55 m
6.2. 6 s
6.3. $\frac{1}{6}$ s^{-1}
6.4. $\frac{\pi}{3}$ rad/s
6.5. $\frac{\pi}{6}$
6.6. $x_0 = \frac{55\sqrt{3}}{2}$ m, $y_0 = \frac{55}{2}$ m
6.7. $\frac{110\pi}{3}$ m
6.8. 1 s
6.9. $-\frac{\pi}{6}$
6.10. $y = -55\sin\left[\frac{\pi}{3}\left(x + \frac{1}{2}\right)\right] + 80$
6.11. Gebruik grafiese sagteware, byvoorbeeld desmos, om jou grafiek te kontroleer.

5 Ongelykhede en absolute waarde

Oefening 5.1

1. $x < -1$ of $x \geq 3$
2. $x < 5$ of $x \geq 16$
3. $-1 < x \leq 2 - \sqrt{5}$ of $1 < x \leq 2 + \sqrt{5}$

Oefening 5.2

1.1. $k = 2$
1.2. Geen oplossing
1.3. $r = -5, r = 3$
2.1. $-4 \leq x \leq 0$
2.2. $x < 1$ of $x > 4$
2.3. $x < -\frac{2}{3}$ of $x > 2$
3.1. $|x - 7| < 3$
3.2. $|t - 8| \leq 5$
3.3. $|y| < 3$
3.4. $|6 - m| = 4$

6 Limiete en kontinuïteit

Oefening 6.1

1. $x = -2$, $\lim_{x\to-2^-} f(x) \nexists$, funksie nie gedefinieer vir $x < -2$; $x = 0$, $\lim_{x\to-0^+} f(x) \nexists$ infinite discontinuity; $x = 2$, $\lim_{x\to2^-} f(x) \neq \lim_{x\to2^+} f(x)$, sprong diskontinuïteit; $x = 5$, $\lim_{x\to-5^+} f(x) \nexists$, funksie nie gedefinieer vir $x > 5$.
2. $x = -1$, $\lim_{x\to-1^-} f(x) \nexists$, funksie nie gedefinieer vir $x < -1$; $x = 5$, $\lim_{x\to5^-} f(x) \neq \lim_{x\to5^+} f(x)$, sprong diskontinuïteit; $x = 6$, $\lim_{x\to6^-} f(x) \neq \lim_{x\to6^+} f(x)$, sprong diskontinuïteit.
3. $g(-3) = \frac{2}{9} = \lim_{t\to-3} \frac{t-3}{9t}$

Oefening 6.2

1. 0
2. -2

3. 1
4. 48
5. ∞
6. $\frac{3}{2}$
7. $\frac{2}{3}$
8. ∞

7 Inleiding tot funksie analise

Oefening 7.1

1. $-\frac{3}{2t\sqrt{t}}$
2. $\frac{13}{(3t+2)^2}$
3. $6x-3$
4. $\cos x$
5. $-\sin x$
6. $\frac{2p}{|p|}$

Oefening 7.2

1. Diskontinu
2. Vertikale verloop
3. Skerppunt / knakpunt
4. Diskontinu

Oefening 7.3

1. 8
2. -12

3.1. $12x^2+\frac{3}{2}\sqrt{x}+\frac{20}{x^5}$

3.2. $(2x+6)(x^3-6x^2)+(x^2+6x)(3x^2-12x)=5x^4-108x^2$ en $\frac{d}{dx}(x^5-36x^3)=5x^4-108x^2$

3.3. $\frac{2x}{5}$

3.4. $\frac{2x(x^2+1)-(x^2-1)2x}{(x^2-1)^2}=\frac{4x}{(x^2-1)^2}$

Oefening 7.4

1.1. $f'(x)=\frac{3}{2\sqrt{3x-2}}$

1.2. $g'(x)=-\frac{4x}{(x^2-1)^3}$

1.3. $h'(x)=5(x^3-x^2+x+1)^4(3x^2-2x+1)$

1.4. $j'(x)=\frac{1}{4}(8x-6)(4x^2-6x)^{-\frac{3}{4}}=\frac{4x-3}{2\sqrt[4]{(4x^2-6x)^3}}$

1.5. $k'(x)=400(2x^2+4x)^{99}(x+1)$

1.6. $m'(x)=-2\cos x\sin x$

2. -506.25 mm^3/min

3.1. 2 km/h

3.2. 7 ure, 1040.62 km^2

Oefening 7.5

1.1. 607 items teen R184.83 per item en 6593 items teen R35.17

1.2. 4000

1.3. R100

1.4. R400000

1.5. 3600

1.6. R110
1.7. R224000
2.1. Aan die begin en die 30ste maand
2.2. 15de maand
2.3. R450/maand
2.4. R19000 in die 30ste maand
3.1. $T'(t) = -\frac{t}{2} + \frac{5}{2}$
3.2. 0. Temperatuur verander van toename na afname.
3.3. $43.75°C$
4.1.1. Gebruik grafiese sagteware, byvoorbeeld desmos, om jou grafiek te kontroleer. Draaipunte by $A = (-1,36)$ en $B = \left(\frac{11}{3}, -\frac{400}{27}\right)$. Infleksiepunt by $\left(\frac{3}{4}, \frac{286}{27}\right)$.
4.1.2. Punt waar die konkawiteit verander.
4.1.3. $-\frac{98}{9}$
4.1.4. $y = -16x + 32$
4.2.1. $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{400}{27}\right), (4,36)$
4.2.2. $H\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{400}{27}$ is 'n lokale minimum en $(4,36)$ is 'n lokale maksimum.
4.2.3. $\left(\frac{5}{3}, \frac{286}{27}\right)$
4.2.4. $H''(x) > 0, x < \frac{5}{3}$ en $H''(x) < 0, x > \frac{5}{3}$.
4.3.1. Vertikale asimptoot by $x = \frac{1}{2}$ en horisontale asimptoot by $y = -\frac{1}{3}$.
4.3.2. y-afsnit by $x = -3$ en x-afsnit by $y = 2$.
4.3.3. Gebruik grafiese sagteware, byvoorbeeld desmos, om jou grafiek te kontroleer.
5.1.1. $V(x) = (24 - 2x)(18 - 2x)x$
5.1.2. Gebruik grafiese sagteware, byvoorbeeld desmos, om jou grafiek te kontroleer. Draaipunte by $(7 - \sqrt{13}, 655)$ en $(7 + \sqrt{13}, -95)$. Infleksiepunt by $(7,280)$.
5.1.3. 11.5 cm^2, 655 cm^3
5.2.1. Wenk: $V = \frac{\pi}{3}r^3h$ met $r = x$ en $h = y$.
5.2.2. Gebruik grafiese sagteware, byvoorbeeld desmos, om jou grafiek te kontroleer. $x \in [0,2]$ vir $V(x) \geq 0$. Draaipunte by $(0,0)$ en $\left(\sqrt{2}, \frac{4\pi}{3}\right)$. Infleksiepunt by $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{20\pi}{27}\right)$.
5.2.3. $V(\sqrt{2}) = \frac{4\pi}{3}$

Oorspronklike gegewens: (10085858) C:\Users\10085858\OneDrive - North-West University\Dokumente\Induksiekursus\Word\2025\Wiskunde induksiegids 2025.docm
18 Oktober 2024