HOOFSTUK 6

Vergelyking van meer as twee groepe metings

In Hoofstuk 4 is effekgrootte-indekse bespreek vir verskille tussen die gemiddeldes van twee groepe metings (onafhanklik of afhanklik). In die geval waar 'n eksperimentele ontwerp of 'n studie meer as twee groepe metings behels, is daar twee soorte effekte wat van belang kan wees en waarvoor effekgrootte-indekse dien as maatstawwe. Die eerste is die sg. *omnibus-effek* waarmee vasgestel word of ten minste twee van die groepe metings se gemiddeldes van mekaar verskil en hoedanig sulke verskille is. Die tweede is 'n *kontras-effek,* waar spesifieke groepe metings se gemiddeldes of kombinasies daarvan vergelyk word.

Voorbeeld 6.1:

In voorbeeld A, Hoofstuk 3 was daar 3 groepe metings: voor-, na- en opvolgtoetse. 'n Omnibus-effek gee uitspraak of daar enige verskil is tussen bv. die gemiddelde BDI-metings van die voor-, na- en opvolgtoetse. 'n Kontras sou bv. wees $\overline{x}_V - \overline{x}_N$, die verskil tussen gemiddeldes van voor- en natoetse. 'n Ander voorbeeld van 'n kontras is $\overline{x}_V - \frac{1}{2}\left(\overline{x}_N + \overline{x}_O\right)$, waar $\overline{x}_O$ die gemiddeld van die opvolgtellings is. Hier word die gemiddelde van die na- en opvolgtoetse se gemiddeldes met die voortoetsgemiddelde vergelyk. □

Opmerking:

Let op dat hierbo na *groepe metings* verwys word, wat meer algemeen is as bv. groepe persone, populasies of steekproewe is. Groepe metings kan *onafhanklik* wees, dan beteken dit verskillende groepe persone, populasies of steekproewe. Dit kan egter ook *afhanklike* metings wees op dieselfde persone binne een populasie of steekproef. Voorbeeld 6.1 illustreer dit, want 'n voor-, na- en opvolgmeting is op elkeen van die hartpasiënte geneem en is dus afhanklik.

6.1 Indekse vir omnibus-effekte by onafhanklike metings

Die voor die hand liggende uitbreiding van Cohen se δ na meer as twee groepe, sou wees (Cohen, 1969, 1977, 1988):

$$\delta_{omn} = \frac{\mu_{maks} - \mu_{min}}{\sigma} \quad , \tag{6.1}$$

waar μ_{maks} en μ_{min} die grootste en kleinste gemiddeldes van groepe is en σ die gemeenskaplike SA van al die groepe is.

Na aanleiding van 'n eenrigting-variansieanalise (ANOVA), stel Cohen die indeks f voor:

$$f = \frac{\sigma_\mu}{\sigma} \quad , \tag{6.2}$$

waar

$$\sigma_\mu^2 = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\left(\mu_{\mathrm{i}} - \mu\right)^2, \tag{6.3}$$

die variansie van die $\mu_i{}'s$,

met k : getal groepe

μ_{i} : gemiddeld van $i-$de groep

μ : gemiddeld van al die $\mu_i{}'s$,

en aangeneem word dat die groepe ewe groot is.

Gestel σ_t^2 is die *totale variansie* van al die metings oor groepe heen, dan vir groepgroottes en variansies gelyk, geld:

$$\sigma_t^2 = \sigma^2 + \sigma_\mu^2 \tag{6.4}$$

'n Sinvolle effekgrootte-indeks kan dan die proporsie van die totale variansie, wat toegeskryf kan word deur σ_t^2 , wees:

$$\eta^2 = \frac{\sigma_\mu^2}{\sigma^2 + \sigma_\mu^2} \quad . \tag{6.5}$$

Dit is Pearson se eta-kwadraat en hou verband met f (uit 6.2 en 6.4):

$$\eta^2 = \frac{f^2}{1+f^2} \qquad 6.6)$$

Die indeks η^2 en beramers daarvan het egter in die praktyk wyer inslag gevind as δ_{omn} en f as ‘n omnibus effekgrootte-indeks. Gevolglik konsentreer ons verder net daarop.

6.1.1 Beraming van η^2:

Vooraf voer ons die volgende notasie rondom eenrigting-ANOVA in (vir meer besonderhede raadpleeg Steyn et.al, 1998: 511-513).

SK_G : tussen groepe som van kwadrate,

SK_F : binne groepe (fout) som van kwadrate,

SK_{tot} : totale som van kwadrate.

Indien die metings dié van ewekansige steekproewe is, is ‘n sydige beramer vir η^2:

$$\tilde{\eta}^2 = \frac{SK_G}{SK_{tot}} \quad , \tag{6.7}$$

wat η^2 oorberaam. Hierdie sydigheid word deur Fowler (1985) gegee as:

$$(1-\eta^2)\left[k-(1-\eta^2)(1+2\eta^2)\right]/n \, .$$

Hays se beramer $\hat{\omega}^2$ (kyk Fidler & Thompson, 2001: 585) is ‘n aanpassing van $\tilde{\eta}^2$ en word gegee deur:

$$\hat{\omega}^2 = \frac{SK_G - (k-1)SK_F/(n-k)}{SK_{tot} + SK_F/(n-k)} , \tag{6.8}$$

waar n die totale getal metings oor die k groepe is.

Opmerkings:

1) Hoewel $\hat{\omega}^2$ ‘n aangepaste beramer is om sydigheid te beperk, kan die waarde daarvan *negatief* wees. Dit gebeur as die variansieverhouding

$$F = \frac{SK_G / (k-1)}{SK_F / (n-k)} < 1 \quad , \tag{6.9}$$

wat gewoonlik net die geval is as $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_k$ nie verwerp kan word nie, wat gepaard gaan met klein waardes van η^2. In sulke gevalle word $\hat{\omega}^2 = 0$ geneem, omdat $\eta^2 > 0$ nie met ‘n negatiewe waarde beraam kan word nie.

2) Die beramer $\hat{\omega}^2$ is die ANOVA analoog van R_a^2, die aangepaste R^2 soos in paragraaf 5.2.5 gedefinieer, terwyl $\hat{\omega}^2$ in paragraaf 5.3.2 ‘n spesiale geval is as $k = 2$.

3) In terme van die variansieverhouding F is

$$\hat{\omega}^2 = \frac{F - 1}{F + \frac{n\text{-}k}{k\text{-}1}} \quad , \tag{6.10}$$

wat (5.39) in paragraaf 5.3.3 veralgemeen.

4) Volgens Carroll en Nordholm (1975) is $\hat{\omega}^2$ ’n beramer vir

$$\omega^2 = \frac{(1/n)\sum_i n_i(\mu_i - \mu)^2}{\sigma^2 + (1/n)\sum_i n_i(\mu_i - \mu)^2} \quad , \tag{6.11}$$

waar $\frac{n_i}{n} = \frac{N_i}{N}$, d.i. dat n_i eweredig is aan die populasiegrootte N_i. Let op dat dit na η^2 herlei as die n_i's gelyk is (en dus die N_i's ook gelyk).

5) Streng gesproke is $\hat{\omega}^2$ ook nie onsydig vir η^2 nie, maar wel (Hays, 1973:486):

$$\hat{\eta}^2 = \frac{(n-k-2)F/(n-k)-1}{(n-k-2)F/(n-k)+(n-k)/(k-1)} \tag{6.12}$$

Voorbeeld 6.2:

Beskou Voorbeeld D in Hoofstuk 3. Hier was $k=3$, $n=444$, $SK_G = 67,47$, $SK_F = 854,49$, $SK_{tot} = 921,96$ en $F = 17,41$.

$$\tilde{\eta}^2 = \frac{67,74}{921,96} = 0,0735$$

$$\hat{\omega}^2 = \frac{67,74 - 2 \times 854,49/441}{921,96 + 854,49/441} = \frac{67,74 - 3,88}{921,96 + 1,94} = \frac{63,86}{923,90}$$
$$= 0,0690.$$

Dit is egter volgens (6.10) makliker om te bereken:

$$\hat{\omega}^2 = \frac{17,41 - 1}{17,41 + \frac{441}{2}} = \frac{16,41}{237,91} = 0,0690$$

Volgens (6.11) is die beraming:

$$\hat{\eta}^2 = \frac{439 \times 17,41/441 - 1}{439 \times 17,41/441 + 441/2} = \frac{17,33 - 1}{17,33 + 220,5} = 0,0687.$$

Dis duidelik dat $\tilde{\eta}^2$ 'n effens hoër waarde gee want dit oorberaam η^2. Die beramings volgens $\hat{\omega}^2$ en $\hat{\eta}^2$ is prakties dieselfde. □

6.1.2 Vertrouensintervalle vir η^2

Onder die aanname van ewekansige steekproewe uit normaalpopulasies, gee Fowler (1985) 'n benaderde $100(1-\alpha)\%VI$ vir η^2 afgelei uit die Laubscher-benadering van 'n nie-sentrale F verdeling. Dit geld dat die variansie-verhouding F 'n nie-sentrale F-verdeling besit met $k-1$ en n - k vryheidsgrade en nie-sentraliteitsparameter $nsp_F = n\eta^2 / \left(1-\eta^2\right)$. Soos tevore word eers 'n VI vir nsp bepaal met grense:

$$nsp_{FO} = \tfrac{1}{2}\left[wx + z^2_{\alpha/2}(x+c) - 2(k-1) + c\right] - z_{\alpha/2}\sqrt{wx(x+c)}$$

en (6.13)

$$nsp_{FB} = \tfrac{1}{2}\left[wx + z^2_{\alpha/2}(x+c) - 2(k-1) + c\right] + z_{\alpha/2}\sqrt{wx(x+c)}$$

waar $w = 2(n-k)-1$

$x = (k-1)F/(n-k)$

$c = (k-1+2nx)/(k-1+nx)$.

Die benaderde VI-grense vir η^2 volg uit die definisie van nsp_F en is:

$$\eta^2_{O,ben} = nsp_{FO} / (nsp_{FO} + n)$$

en (6.14)

$$\eta^2_{B,ben} = nsp_{FB} / (nsp_{FB} + n)$$

Daar kan egter ook 'n presiese $100(1-\alpha)\%VI$ $\left(\eta^2_O;\eta^2_B\right)$ bepaal word deur van dieselfde SAS-program VI_R2 as in paragraaf 5.2.5 gebruik te maak en as inset $u = k-1$, n en F te neem. Die program bereken ook die beramers $\tilde{\eta}^2$ en $\hat{\eta}^2$ (as $R2$ en $R2a$).

Voorbeeld 6.3:

Beskou Voorbeeld 6.2. Om die benaderde 95% VI vir η^2 te bepaal, bereken eers

$$w = 2\times 441 - 1 = 883$$
$$x = 2\times 17,41/441 = 0,079$$
$$\begin{aligned} c &= (3-1+2\times 444\times 0,079)/(3-1+444\times 0,079) \\ &= 72,113/37,057 = 2,057 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} nsp_{FO} &= \tfrac{1}{2}\left[883\times 0,079 + 1,96^2(0,079+2,057) - 2\times 2 + 2,057\right] \\ &\qquad -1,96\sqrt{883\times 0,079(0,079+2,057)} \\ &= \tfrac{1}{2}[69,757 + 8,206 - 6,057] - 23,925 \\ &= 35,953 - 23,925 \\ &= 12,028 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} nsp_{FB} &= 35,953 + 23,925 \\ &= 59,878 \end{aligned}$$

$$\eta^2_{O,ben} = 12,028/(12,028+444) = 0,026$$

$$\eta^2_{B,ben} = 59,878/(59,878+444) = 0,119\,.$$

Die presiese 95% VI vir nsp_F uit die program $R2\_VI$ is $(14,387\,;61,194)$ terwyl die VI vir η^2: $\eta^2(0,032\,;0,121)$.

Dit blyk dus dat die presiese interval effense hoër waardes gee vir beide die onder- en bogrens.

□

6.1.3 Vergelyking van meer as twee proporsies

Soos in die geval van verskille in proporsies in paragraaf 5.4.4, kan proporsies as gemiddeldes beskou word en ’n effekgrootte daarvoor bepaal word soos in die vorige paragraaf.

Laat

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ as populasie } i \text{ se } j\text{-de element positief is} \\ 0 \text{ andersins} \end{cases}$$

en

$$Y_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ as steekproef uit populasie } i \text{ se } j\text{-de element positief is} \\ 0 \text{ andersins} \end{cases}$$.

Met N_i en n_i die populasie- en steekproefgroottes, word die eenrigting variansie-analise (ANOVA) tabelle vir y_{ij} en Y_{ij} gegee deur (a) en (b) hieronder (D'Agostino, 1972):

	Bron van Variasie	Som van Kwadrate	Vryheidsgrade	Som van Kwadrate
a)	Tussen populasies	$\sum_i N_i(\pi_i - \overline{\pi})^2 = a$	-	-
	Binne populasies	$\sum_i N_i \pi_i (1-\pi_i) \ = b$	-	-
	Totaal	$N\overline{\pi}(1-\overline{\pi}) \ = Nc$	-	-
b)	Tussen steekproewe	$\sum_i n_i(p_i - \overline{p})^2 = A$	$k-1$	$\frac{A}{k-1}$
	Binne steekproewe	$\sum_i n_i p_i (1-p_i) \ = B$	$n-k$	$\frac{B}{n-k}$
	Totaal	$n\overline{p}(1-\overline{p}) \ = nC$	$n-1$	

Hier is $\pi_i = \frac{1}{N_i}\sum_j y_{ij}$, die *i*-de populasie-proporsie terwyl $p_i = \frac{1}{n_i}\sum_j Y_{ij}$, die *i*-de steekproefproporsie is. Verder is $\overline{\pi} = \frac{1}{N}\sum_i N_i \pi_i$ en $\overline{p} = \frac{1}{n}\sum_i n_i p_i$, waar $N = \sum_i N_i$ en $n = \sum_i n_i$.

Die geweegde effekgrootte vir gelykheid van k populasies met ongelyke groottes se proporsies word n.a.v. (6.7):

$$\eta_{pg}^2 = \frac{a}{Nc} = \frac{\sum_i N_i(\pi_i - \overline{\pi})^2}{N\overline{\pi}(1-\overline{\pi})} \tag{6.15}$$

Indien $N_1 = N_2 = ... = N_k$, volg dat ongeweegde

$$\eta_p^2 = \frac{\frac{1}{k}\sum_i (\pi_i - \overline{\pi})^2}{\overline{\pi}(1-\overline{\pi})} \tag{6.16}$$

die proporsie-analoog van η^2 in (6.5).

Die steekproef-effekgrootte is volgens die ANOVA-tabel (b) dan

$$\tilde{\eta}_p^2 = \frac{A}{nC} = \frac{\sum_i n_i(p_i - \overline{p})^2}{n\overline{p}(1-\overline{p})} \tag{6.17}$$

Hierdie is egter die analoog van (6.7) en $\eta_p{}^2$ word oorberaam.

Die variansieverhouding uit ANOVA-tabel (b) i.t.v. proporsies word:

$$F_p = \frac{\frac{A}{k-1}}{\frac{B}{n-k}} = \frac{\sum_i \frac{n_i(p_i - \overline{p})^2}{k-1}}{\sum_i \frac{n_i p_i(1-p_i)}{n-k}} \tag{6.18}$$

Vir groot steekproewe het F_p benaderd 'n nie-sentrale $F_{k-1,n-k}$-verdeling met nie-sentraliteit $\frac{n\eta_p^2}{1-\eta_p^2}$. Gevolglik is 'n onsydige beramer vir $\eta_p{}^2$ uit (6.12):

$$\hat{\eta}_p^2 = \frac{\frac{(n-k-2)F_p}{n-k} - 1}{\frac{(n-k-2)F_p}{n-k} + \frac{n-k}{k-1}} \tag{6.19}$$

Opmerking:

Die k populasies se proporsies kan verkry word uit die volgende (2 x k) - gebeurlikheidstabel:

	Populasies		
	1	2	k
Positief	$N_1\pi_1$	$N_2\pi_2$	$N_k\pi_k$
Negatief	$N_1(1-\pi_1)$	$N_2(1-\pi_2)$	$N_k(1-\pi_k)$

Volgens D'Agostino (1972) word die chi-kwadraatwaarde dan

$$x^2 = \frac{a}{c} = \frac{\sum_i N_i(\pi_i - \overline{\pi})^2}{\overline{\pi}(1-\overline{\pi})} = N\eta_{pg}^2 \qquad (6.20)$$

Die steekproef-analoog:

$$X^2 = \frac{A}{C} = \frac{\sum_i n_i(p_i - \overline{p})^2}{\overline{p}(1-\overline{p})} = n\tilde{\eta}_p^2 \qquad (6.21)$$

Hieruit volg dat η_{pg}^2 en $\tilde{\eta}_p^2$ dieselfde is as w^2 vir 'n (2 x k) -gebeurlikheidstabel.

In die geval waar gelyke populasie-groottes veronderstel word, kan $\hat{\eta}_p^2$ as 'n onsydige beramer vir w^2 gebruik word.

Voorbeeld 6.4 (Cohen, 1969: 219):

Die volgende proporsionele indeling is gemaak t.o.v. geslag en politieke voorkeur in Amerika:

	Demokraat	Republikein	Onafhanklik	Geslag proporsies
Manlik	0,22	0,35	0,03	0,60
Vroulik	0,23	0,10	0,07	0,40
Voorkeur proporsies	0,45	0,45	0,10	1,00

Ten einde die effekgrootte η^2_{pg} te bereken, kan π_1, π_2 en π_3 as die proporsie mans by elke party geneem word en sonder verlies aan algemeenheid $N_1 = 45$, $N_2 = 45$, $N_3 = 10$ en $N = 100$ geneem word.

Omdat $\pi_1 = \dfrac{0,22}{0,45} = 0,489$, $\pi_2 = \dfrac{0,35}{0,45} = 0,778$ en $\pi_3 = 0,3$, is

$\bar{\pi} = 0,45 \times 0,489 + 0,45 \times 0,778 + 0,10 \times 0,30 = 0,6$ (= proporsie mans).

$$\eta^2_{pw} = \frac{45(0,489-0,6)^2 + 45(0,778-0,6)^2 + 10(0,3-0,6)^2}{100 \times 0,6 \times 0,4}$$

$$= \frac{2,88}{24} = 0,12$$

terwyl $w = \sqrt{\eta^2_{pw}} = 0,346$.

Let op dat as gelyke gewigte (populasiegroottes) by die drie partye veronderstel was, was $\pi = \dfrac{1}{3}(0,489 + 0,778 + 0,3) = 0,522,$ sodat

$$\eta^2_p = \frac{(0,489-0,522)^2 + (0,778-0,522)^2 + (0,3-0,522)^2}{0,522 \times 0,478}$$

$$= \frac{0,116}{0,250} = 0,465, \qquad w = 0,682 .$$

Dit verskil baie van die waarde van $\sqrt{\eta^2_{pg}}$.

6.1.4 Riglynwaardes vir omnibus-effek η^2

Cohen (1969, 1977, 1988) se uitgangspunt is dat uit δ_{omn} in (6.1) volg dat as $k = 2$, dan is $\delta_{omn} = \delta$ in Hoofstuk 4 en $\sigma_\mu = \frac{1}{2}(\mu_1 - \mu_2)$ sodat

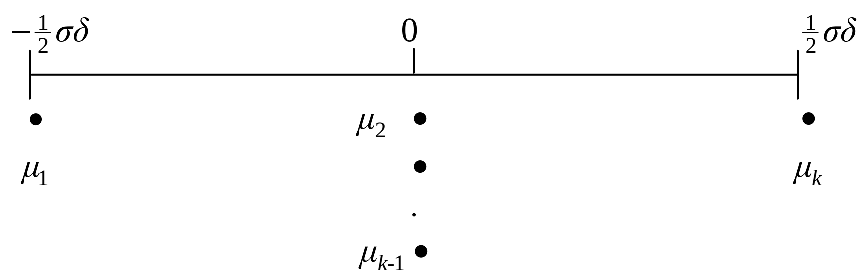
$$f = \tfrac{1}{2}\delta . \qquad (6.22)$$

Hierdie verband gee dus aanleiding tot die riglynwaardes vir f as $0,1$; $0,25$ en $0,4$ as klein, medium en groot effekte, afgelei uit $\delta = 0,2$; $0,5$ en $0,8$. Deur van die verband tussen η^2 en f gebruik te maak in (6.6), stel Cohen die volgende gerieflike riglynwaardes vir η^2 voor:

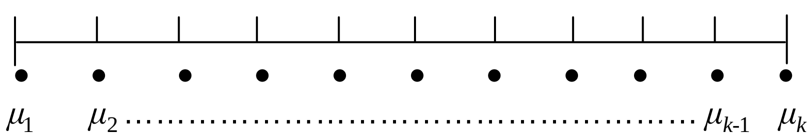
- Klein effek : $\eta^2 = 0,01$
- Medium effek : $\eta^2 = 0,06$
- Groot effek : $\eta^2 = 0,14$.

Omdat hierdie waardes verkry word deur na proporsie variansie van populasie lidmaatskap in die geval van net 2 populasie te kyk, probeer Cohen 'n motivering gee waarom dit ook vir $k > 2$ van toepassing kan wees. Hy beskou drie verskillende patrone waarvolgens die gemiddeldes $\mu_1, \mu_2 ...., \mu_k$ varieer oor die interval $\left(-\frac{1}{2}\sigma\delta;\ \frac{1}{2}\sigma\delta\right)$:

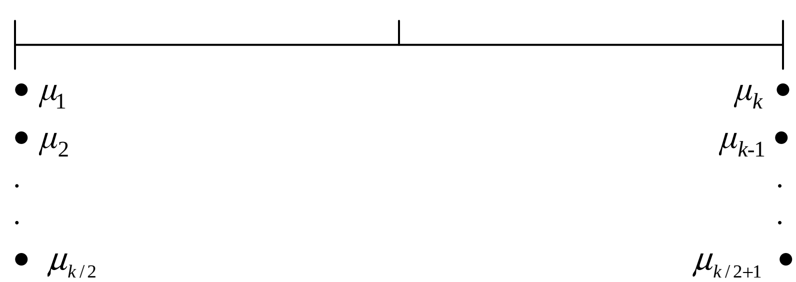
Patroon 1:



Patroon 2:



Patroon 3:



Let op dat patroon 1 die kleinste variasie van μ's gee, patroon 3 die grootste (aanvaar dat k ewe is, sodat die helfte van die μ's by elk van die endpunte van die interval lê). Patroon 2 waar die μ's gelyk gespasieerd is, gee 'n variasie wat tussen dié van patrone 1 en 3 is.

By elkeen van die patrone kan f (en dus η^2) bepaal word as 'n ander funksie van δ en k. Tabel 6.1 gee dit, asook δ in terme van f, weer: met voorbeelde as $k=2$ en 8:

Tabel 6.1

	f			δ		
Patroon	algemeen	$k=2$	$k=8$	algemeen	$k=2$	$k=8$
1	$\delta\sqrt{\frac{1}{2k}}$	$0,5\delta$	$0,25\delta$	$f\sqrt{2k}$	$2f$	$4f$
2	$\frac{\delta}{2}\sqrt{\frac{k+1}{3(k-1)}}$	$0,5\delta$	$0,33\delta$	$2f\sqrt{\frac{3(k-1)}{k+1}}$	$2f$	$3,06f$
3	$\frac{1}{2}\delta$	$0,5\delta$	$0,5\delta$	$2f$	$2f$	$2f$

Let op dat vir $k=2$ is die patrone identies, en is δ die gestandaardiseerde verskil in gemiddeldes soos in Hoofstuk 4 bespreek.

6.1.5 Motivering van riglynwaardes van Cohen

1. *Klein effek* $\left(f = 0,1\ ;\ \eta^2 = 0,01\right)$**:** Hier is die SA van die gemiddeldes een-tiende van die SA van metings binne die populasies. Vir $k=2$ kom dit ooreen met $\delta=0,2$ en vir $k=8$ met $\delta=0,4$ vir patroon 1, $\delta=0,306$ vir patroon 2 en $\delta=0,2$ vir patroon 3. Patroon 3, wat die grootste variasie in die μ's gee, lewer dieselfde waarde van $\delta=0,2$ op wat as 'n klein effek beskou is by $k=8$.

Met variasie die kleinste (volgens patroon 1) kan δ heelwat groter word, bv. $\delta = 0,4$ as $k = 8$. Dit is die gevolg daarvan dat slegs 2 gemiddeldes weg lê van die res en daar moet dus toegelaat word dat die interval waaroor die μ's varieer groter kan wees. In terme van η^2, beteken dit dat die proporsie variansie toe te skryf aan populasie-lidmaatskap, maar 1% is.

2. *Medium effek* $\left(f = 0,25 \;;\; \eta^2 = 0,06 \right)$: Vir $k = 2$ en patroon 3 kom dit ooreen met $\delta = 0,5$, wat tevore as 'n medium effek beskou is (kyk paragraaf 4.5). In die geval van klein variasie volgens patroon 1 is $\delta = 1,0$ vir $k = 8$ wat beteken dat die ekstreme gemiddeldes een SA verskil. Die proporsie variansie toe te skryf aan populasie-lidmaatskap is nou 6%. As voorbeeld wys Cohen hier dat die gemiddelde IK's van 7 beroepsgroepe waarvan $\sigma = 12$ en gelyk gespasieerd is oor die interval 98-107, 'n waarde $f = 0,25$ gee.

3. *Groot effek* $\left(f = 0,4 \;;\; \eta^2 = 0,14 \right)$: Vir $k = 2$ en patroon 3 kom dit ooreen met $\delta = 0,8$, wat tevore as 'n groot effek beskou is. By patroon 1 beteken dit dat as $k = 8$ die twee ekstreme gemiddeldes 1,6 SA's uitmekaar lê. Die proporsie variansie η^2 is nou 14%. In die voorbeeld van die 7 beroepsgroepe se gemiddelde IK's hierbo moet dit tussen 98 en 112 varieer om $\delta = 0,4$ op te lewer.

6.2 Indekse vir omnibus-effekte by afhanklike metings

Beskou Voorbeeld B, Hoofstuk 3 waar op elke persoon binne die kontrole- en eksperimentele groepe 3 *afhanklike* metings van voor-, na- en opvolgtoetstellings bepaal is. As ons belangstel om die drie toetse as afhanklike groepe te vergelyk, dan kan 'n eenrigting ANOVA met herhaalde metings oor toetsgeleenthede gedoen word. By onafhanklike groepe in die vorige paragraaf het ons slegs twee bronne van variasie gehad: tussen groepe en binne groepe. Met afhanklike metings binne groepe, kan die binne-groepe variasie verder opgedeel word in ‘n tussen-persoon (‘subjek’ in die algemeen) variasie en ‘n persone-binne-groepe variasie, d.i. die persoon x groep interaksie, wat nou as die foutvariansie beskou word.

Neem σ_p^2 as die variansie van die persoon (of subjek) effek en σ_e^2 as die nuwe foutvariansie, dan word die ou foutvariansie

$$\sigma^2 = \sigma_p^2 + \sigma_e^2 \tag{6.23}$$

en die totale variansie in (6.4) kan nou geskryf word as:

$$\sigma_t^2 = \sigma_\mu^2 + \sigma_p^2 + \sigma_e^2 \tag{6.24}$$

Soortgelyk kan die somme van kwadrate soos in paragraaf 6.1.1 gedefinieer, uitgebrei word deur

$$SK_F = SK_P + SK_e \tag{6.25}$$

waar SK_P : tussen persone (subjekte) som van kwadrate

SK_e : persone binne groepe (fout) som van kwadrate,

sodat:

$$SK_{tot} = SK_G + SK_P + SK_e \tag{6.26}$$

Soos in paragraaf 5.2.2 kan ‘n parsiële η^2 nou ook verkry word (soos ‘n parsiële R^2) waar die invloed van ‘n effek waarin nie belang gestel word nie, uitgehaal word. Waar by onafhanklike metings σ_μ^2 gedeel word deur variansie van σ_t^2 soos in (6.4), deel ons nou deur $\sigma_\mu^2 + \sigma_e^2$ i.p.v. σ_t^2 soos in (6.16) omdat σ_p^2 nie met die foutvariasie te doen het nie.

Dus

$$parsi\ddot{e}le\ \eta^2 = \frac{\sigma_\mu^2}{\sigma_\mu^2 + \sigma_e^2} \quad , \tag{6.27}$$

wat by afhanklike metings kontroleer vir die persoon-effek waarin nie belang gestel word nie. Die parsiële η^2 sou dus as 'n *omnibus effekgrootte-indeks* in hierdie geval gebruik kan word en kan beraam word deur (Kline 2004a: tabel 6.8) die beramers van σ_μ^2 en σ_e^2 in (6.27) te vervang:

$$parsi\ddot{e}le\ \hat{\eta}^2 = \frac{gemSK_G - gemSK_e}{gemSK_G + \left(\frac{kn}{k-1} - 1\right) gemSK_e}, \tag{6.28}$$

met $gemSK_G = SK_G / (k-1)$ en $gemSK_e = SK_e / (n-1)(k-1)$. Let op dat n nou die getal persone (subjekte) gee en nie meer die totale getal metings soos by onafhanklike metings nie.

Voorbeeld 6.5:
Beskou Voorbeeld A van Hoofstuk 3. Hier was 3 afhanklike metings per persoon sodat daar $k = 3$ afhanklike groepe is. Uit Tabel A.2 volg nou $n = 25$ (slegs eksperimentele groep) $gemSK_G = 516{,}19 / 2$ en $gemSK_e = 1183{,}15/(2 \times 24)$.

Die beraming van parsiële $\hat{\eta}^2$:

$$parsi\ddot{e}le\ \hat{\eta}^2 = \frac{258{,}10 - 24{,}65}{258{,}10 + 36{,}5 \times 24{,}65} = \frac{233{,}45}{1157{,}78} = 0{,}202.$$

Dit beteken dat die proporsie van die totale variansie, gekontroleer vir persoon-effek, wat toegeskryf kan word aan die toetse, $0{,}202$ is, wat dui op 'n groot effek.

□

Tans bestaan daar volgens Kline(2004a: 191) nie eintlik rekenaarprogramme wat gebruik kan word om vertrouensintervalle vir omnibus effekgrootte-indekse *parsiële* η_G^2 by afhanklike groepe te bepaal nie. Daarom gee ons nie 'n VI in hierdie geval nie.

6.2.1 Intraklas-korrelasie koëffisiënt

Die effekgrootte-indeks parsiële η^2 en sy beramer is onder die aanname dat die groepseffek ‘n *vaste effek* is en gekontroleer word vir persoon-effek. Met ‘n vaste effek word bedoel dat dié behandelings of toetse wat gebruik word vas gekies word, bv. voor-, na en opvolgtoetse soos in Voorbeeld A, Hoofstuk 3. As die groepseffek egter ewekansig is, en die persoonseffek belangrik is, dan gee

$$parsiële\ \hat{\eta}^2 = \frac{\sigma_p^2}{\sigma_p^2 + \sigma_e^2} \quad , \tag{6.29}$$

‘n indeks wat kontroleer vir die groepseffek. Hierdie indeks heet die *intraklas-korrelasiekoëffisiënt* ρ_I (Bartko,1966) en word beraam deur (Kline, 2004a: tabel 6.8):

$$\hat{\rho}_I = \frac{GK_p - GK_e}{GK_p - (k-1)GK_e} = \frac{F_p - 1}{F_p - k + 1} \tag{6.30}$$

waar $GK_p = gem.\ \ SK_G$,

$GK_e = gem.\ SK_e$,

uit die eenrigting ANOVA met persone as groepfaktor en $F_p = GK_p / GK_e$, die variansieverhouding. ‘n Toepassing hiervan is indien daar k toetsitems op elk van n persone gemeet word en die items beskou word as ‘n ewekansige steekproef van ‘n populasie van items wat dieselfde eienskap van persone meet (soos by bv. ‘n afdeling van ‘n belangstellingstoets waar 15 items dieselfde belangstelling meet). Hierdie indeks gee die proporsie van die totale variansie wat toegeskryf kan word aan variansie tussen persone, maar is ook die gemeenskaplike korrelasie tussen enige twee items. Hierdie korrelasie heet ook die *betroubaarheid* van enige van die k items (kyk bv. Bartko 1966; Shrout & Fleiss, 1979).

Bartko (1966) wys daarop dat ρ_I nie net as ‘n proporsie variansie soos deur (6.30) gegee, beskou moet word nie, maar inderwaarheid as ‘n korrelasie. Dit volg daaruit omdat

$$\sigma_p^2 = Kov\left(x_i, x_j\right) \quad \text{en}$$

$$\sigma_p^2 + \sigma_e^2 = Var\left(x_i\right) = Var\left(x_j\right) \text{ , sodat}$$

$$\rho_I = \frac{Kov\left(x_i, x_j\right)}{\sqrt{Var\left(x_i\right)}\sqrt{Var\left(x_j\right)}} = Kor\left(x_i, x_j\right), \quad \text{waar}$$

x_i en x_j die i^e en j^e metings op persone is. Daarom kan ρ_I ook beraam word deur die gemiddelde inter-item korrelasie. As ρ_I beskou word as ‘n effekgrootte-indeks, kan dieselfde riglynwaardes gebruik word as vir die Pearson produkmomentkorrelasiekoëffisiënt ρ of sy steekproef analoog r.

Dus neem $\rho_I = 0,1$: klein effek

$\rho_I = 0,3$: medium effek

$\rho_I = 0,5$: groot effek.

Clark & Watson (1995) beveel aan dat die gemiddelde inter-itemkorrelasie tussen $0,15$ en $0,5$ behoort te lê, maar gee ook toe dat dit afhang van die onderliggende konstruk wat gemeet moet word m.b.v. die items. Hierdie interval stem redelik ooreen met die interval $0,1$ - $0,5$ van riglynwaardes wat ons voorstel. Clark & Watson wys egter daarop dat dit belangrik is om ook die individuele inter-itemkorrelasie se waardes na te gaan. Hierdie waardes behoort ook binne die interval $0,15$ - $0,5$ te lê en redelik homogeen te wees: soos hulle dit stel: “the intercorrelation matrix should appear as a calm but insistent sea of small but highly similar correlations”. Hierdie voorwaarde verseker dat $\hat{\rho}_I$ ‘n beraming gee van enige inter-itemkorrelasie, wat almal as gelyk veronderstel word.

6.2.2 Cronbach alfa-koëffisiënt

Waar ρ_I die betroubaarheid van ‘n enkele item gee, is dit soms ook belangrik om te weet wat die betroubaarheid is van die gemiddeld of som van k items is. Indien aanvaar word dat die items gelyke betroubaarheid ρ_I besit en die items almal dieselfde variansies het, kan die betroubaarheid van die gemiddelde oor k metings uit ρ_I verkry word deur toepassing van die Spearman-Brown-formule (kyk Steyn, 2004: 10):

$$\rho_{xx}^{(k)} = \frac{k\rho_I}{(k-1)\rho_I + 1} \quad , \tag{6.31}$$

en dit word beraam deur die *Cronbach* $\boldsymbol{\alpha}$ *- koëffisiënt*

$$\alpha = \frac{k}{k-1}\left[1 - \frac{\sum_{i=1}^{k} Var(x_i)}{Var\left(\sum_{i=1}^{k} x_i\right)}\right] \quad , \tag{6.32}$$

of deur

$$\hat{\rho}_{xx}^{(k)} = \frac{k\hat{\rho}_I}{(k-1)\hat{\rho}_I + 1} \ . \tag{6.33}$$

Let op dat waar $\hat{\rho}_{xx}^{(k)}$ gebaseer is op die resultate van ‘n ANOVA of die inter-itemkorrelasies, word net van die itemvariansies en die variansie van die som van die items gebruik gemaak by die berekening van α.

Uit (6.31) kan riglynwaardes ook vir $\rho_{xx}^{(k)}$ (en ook $\hat{\rho}_{xx}^{(k)}$, α) bepaal word as dié van ρ_I aanvaar word. Omdat dit ook ‘n funksie is van die getal items k, kan Tabel 6.1 gebruik word as riglyn om die groottes van die indekse te beoordeel. Uit Tabel 6.1 volg dat vir bv. $\hat{\rho}_I$ so klein soos $0{,}1$ die waarde van α $0{,}69$ is as

$k = 20$, maar $0{,}18$ is as $k = 2$. Met groot waardes van $\hat{\rho}_I$, word α ook groot selfs met min items.

Tabel 6.2: Cronbach-alfa waardes

		Getal items						
Effek	Intraklas-korrelasie	2	3	4	5	10	20	50
Klein	0.1	0.18	0.25	0.31	0.36	0.53	0.69	0.85
	0.2	0.33	0.43	0.50	0.56	0.71	0.83	0.93
Medium	0.3	0.46	0.56	0.63	0.68	0.81	0.90	0.96
	0.4	0.57	0.67	0.73	0.77	0.87	0.93	0.97
Groot	0.5	0.67	0.75	0.80	0.83	0.91	0.95	0.98

Voorbeeld 6.6:

Beskou Voorbeeld G, Hoofstuk 3. Die items in hierdie voorbeeld kan as ‘n ewekansige effek beskou word, sodat die beraming van parsiele η_p^2 gegee word deur die intraklas-korrelasiekoëffisiënt:

$$\hat{\rho}_I = \frac{6{,}830 - 1{,}404}{6{,}830 + 9 \times 1{,}404} = 0{,}279.$$

Hierdie gee ‘n beraming van die gemeenskaplike korrelasie tussen enige twee items, en is van medium effek. Let op dat die gemiddeld van al die interitem-korrelasies in Tabel G.2 (die $r = 1$ in die diagonaal uitgesluit) $0{,}286$ is, wat nie veel van $\hat{\rho}_I$ verskil nie.

Die betroubaarheid van die gemiddelde (of som) van die 10 items word beraam as:

$$\hat{\rho}_{xx}^{(k)} = \frac{10 \times 0,279}{9 \times 0,279 + 1} = 0,795,$$

terwyl die Cronbach-α -waarde uit Tabel G.3 verkry word:

$$\alpha = \frac{10}{9}\left(1 - \frac{19,47}{68,30}\right) = 0,794\,,$$

wat prakties dieselfde waardes gee. Uit tabel 6.1 by k = 10 , blyk dit ’n medium effek te wees.

Hoewel die gemiddelde inter-itemkorrelasie uit Tabel G.2 $0,2863$ is, is die interkorrelasies tog baie verskillend. Dis veral items 5 en 6 wat klein en selfs negatiewe korrelasies oplewer. Dit is ‘n aanduiding dat hierdie items nie inval by die onderliggende konstruk wat met die items gemeet wil word nie en liefs weggelaat behoort te word. Sonder items 5 en 6 word die gemiddelde inter-itemkorrelasie nou $0,429$ en $\alpha = 0,855$. Dus neig die betroubaarheid van een item en dié van die gemiddeld van die oorblywende 8 items, beide na groot effekte. □

6.2.3 Vertrouensintervalle vir ρ_I en $\rho_{xx}^{(k)}$

Onder die aanname van normaliteit van die items, volg $F_p = GK_p / GK_F$ ‘n F -verdeling met $n(k-1)$ en $n-1$ vryheidsgrade. Gevolglik is die $(1-\alpha)\,100\%$ VI vir die variansieverhouding σ_p^2 / σ_e^2 se grense (kyk Shrout & Fleiss, 1979):

$$F_O = F_p / F_{\alpha/2}\left(n-1; n(k\text{-}1)\right)$$

en

$$F_B = F_p \cdot F_{\alpha/2}\left(n(k\text{-}1); n\text{-}1\right),$$

sodat die benaderde VI vir ρ_I:

$$\left(\rho_{I,O};\rho_{I,B}\right)=\left(\frac{F_O-1}{F_O+k-1};\frac{F_B-1}{F_B+k-1}\right). \tag{6.34}$$

Deur toepassing van die Spearman-Brown-formule, is die benaderde $(1-\alpha)\,100\%\ VI$ vir $\rho_{xx}^{(k)}$:

$$\left(\frac{k\rho_{I,O}}{(k-1)\rho_{I,O}+1};\frac{k\rho_{I,B}}{(k-1)\rho_{I,B}+1}\right) \tag{6.35}$$

Voorbeeld 6.7:

Beskou Voorbeeld 6.6 met items 5 en 6 weggelaat, sodat $k=8$, en uit Tabel G.4 volg $GK_p=7,494$, $GK_E=1,092$ sodat $F_p=7,494/1,092=6,863$. Vir ‘n $95\%VI$: $F_{0,025}(700;99)=1,372$ en $F_{0,025}(99;700)=1,326$, sodat $F_O=6,863/1,326=5,176$ en $F_B=6,863\times 1,372=9,416$.

$$\left(\rho_{I,O};\rho_{I,B}\right)=\left(\frac{5,176-1}{5,176+8-1};\frac{9,416-1}{9,416+8-1}\right)=\left(0,343;0,513\right)$$

Vir $\rho_{xx}^{(8)}$ is die VI:

$$\left(\frac{8\times 0,343}{7\times 0,343+1};\frac{8\times 0,513}{7\times 0,513+1}\right)=\left(0,807;0,894\right)$$

ρ_I kan dus so klein soos $0,34$ wees, wat ‘n medium effek gee, maar so groot soos $0,51$, wat groot is. Die betroubaarheid van die gemiddeld van die 8 items kan as medium tot groot beskou word as na die riglyne in Tabel 6.2 gekyk word.

6.2.4 Ooreenstemmingsgrense en herhaalbaarheidskoëffisiënt (*Yi* et.al, 2008)

Gestel k verskillende meetinstrumente wat veronderstel is om dieselfde eienskap te meet, word toegepas op elkeen van ‘n ewekansige steekproef van n persone of objekte. Die vraag ontstaan hoedanig stem die verskillende meetinstrumente ooreen?

Die volgende model beskryf die metings Y_{ij} daarop verkry:

$$Y_{ij} = \mu + a_i + e_{ij}\,, \qquad (6.36)$$

waar Y_{ij} die herhaalde meting van die j-de meetinstrument op die i-de objek is, μ die oorkoepelende gemiddelde meting en a_i ‘n kanseffek is wat varieer vir elke objek met ‘n variansie σ_B^2, genoem die tussen objekte-variansie. Die foutterm e_{ij} het variansie σ_w^2, genoem die binne objekte variansie. Beide a_i en e_{ij} se gemiddeldes word as 0 aanvaar.

- Twee meetinstrumente (k = 2):

Neem die verskil tussen die twee metings van objek i as

$$D_i = Y_{i1} - Y_{i2} = e_{i1} - e_{i2}, \text{ sodat}$$

$$E(D_i) = 0 \text{ en } Var(D_i) = 2\sigma_w^2.$$

Laat $\bar{D} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} D_i$ en $S_D = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(D_i - \bar{D}\right)^2}$, die steekproef gemiddelde verskil en standaardafwyking (SA) daarvan wees. Die grense $\bar{D} \pm 1{,}96 S_D$ gee ‘n die beraamde interval waarin 95% van die verskille in die populasie waaruit die steekproef van objekte kom, behoort te val. Hierdie interval word die *ooreenstemmingsgrense* genoem en as die klinies-aanvaarbare verskil buite die reikwydte van die interval val, is daar ‘n goeie ooreenstemming tussen die 2 meetinstrumente volgens die data.

Indien σ_w beraam word uit die data as $\hat{\sigma}_w$, word die *herhaalbaarheidskoëffisiënt* gedefinieer as:

$$h = 1{,}96\sqrt{2}\hat{\sigma}_w = 1{,}96 S_D, \qquad (6.37)$$

wat die boonste grens van ooreenstemming is as $\bar{D} = 0$.

- Meer as twee meetinstrumente (k > 2):

Hier kan die ooreenstemmingsgrense nie meer gebruik word nie. Gebruik wel die herhaalbaarheidskoëffisiënt steeds as:

$$h = 1{,}96\sqrt{2}\hat{\sigma}_w ,$$

met $\hat{\sigma}_w^2$ as die gemiddelde fout-som-van kwadrate uit 'n herhaalde-metings variansieanalise (ANOVA):

$$\hat{\sigma}_w^2 = SSW / \left[n(k-1)\right] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\left(Y_{ij} - \bar{Y}_i\right)^2 / \left[n(k-1)\right], \qquad (6.38)$$

met $\bar{Y}_i = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} Y_{ij}$.

Motivering: SSW kan ook as volg geskryf word:

$$SSW = \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j-1 \\ j\neq j'}}^{k}\sum_{j'=1}^{k}\left(Y_{ij} - Y_{ij'}\right)^2 / k,$$ waar $Y_{ij} - Y_{ij'}$ die

$k(k-1)/2$

gepaarde verskille is vir objek i. Laat $\bar{D}_i^2$ die gemiddelde van die kwadrate van verskille van die $i-de$ objek wees, dan

$$SSW = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{k(k-1)}{2}\right)\bar{D}_i^2 / k$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(k-1)\bar{D}_i^2 / 2 \ ,$$

dus $\hat{\sigma}_w^2 = \sum_{i=1}^{n}\bar{D}_i^2 / 2n$, wat die gemiddelde van kwadrate van pare verskille voorstel.

As aanvaar word dat $E\left(Y_{ij} - Y_{ij'}\right) = 0$ en dat die verskille normaal verdeel is met variansie $2\sigma_w^2$, dan vir ‘n verskil D:

$$
\begin{aligned}
& P\left(0 < |D| < 1,96\sqrt{2}\hat{\sigma}_w\right) \\
&= P\left(-1,96\sqrt{2}\hat{\sigma}_w < D < 1,96\sqrt{2}\hat{\sigma}_w\right) \\
&\doteq 0,95. \qquad (6.39)
\end{aligned}
$$

Dit beteken dat die *absolute* paarsgewyse verskille tussen meetinstrumente tussen 0 en $1,96\sqrt{2}\hat{\sigma}_w$ lê met waarskynlikheid 0,95. As die herhaalbaarheidskoëffisiënt kleiner is as die klinies-aanvaarde absolute verskil, is daar goeie ooreenstemming.

Onder aanname van normaliteit van die foute e_{ij}, geld dat $\hat{\sigma}_w^2$ ‘n Chi-kwadraat verdeling het met vryheidsgrade $n(k-1)$, sodat die *boonste 95% vertrouensgrens van die herhaalbaarheidskoëffisiënt* in die populasie is:

$$B_h = \sqrt{\frac{(1,96)^2\, 2n(k-1)\hat{\sigma}_w^2}{\chi^2_{\alpha,n(k-1)}}}\ , \qquad (6.40)$$

en met k = 2: $$B_h = \frac{1,96\sqrt{n}S_D}{\sqrt{\chi^2_{\alpha,n}}}, \qquad (6.41)$$

waar $\chi^2_{\alpha,\nu}$ die $100\alpha - de$ persentiel van ‘n Chi-kwadraatverdeling met ν vryheidsgrade is.

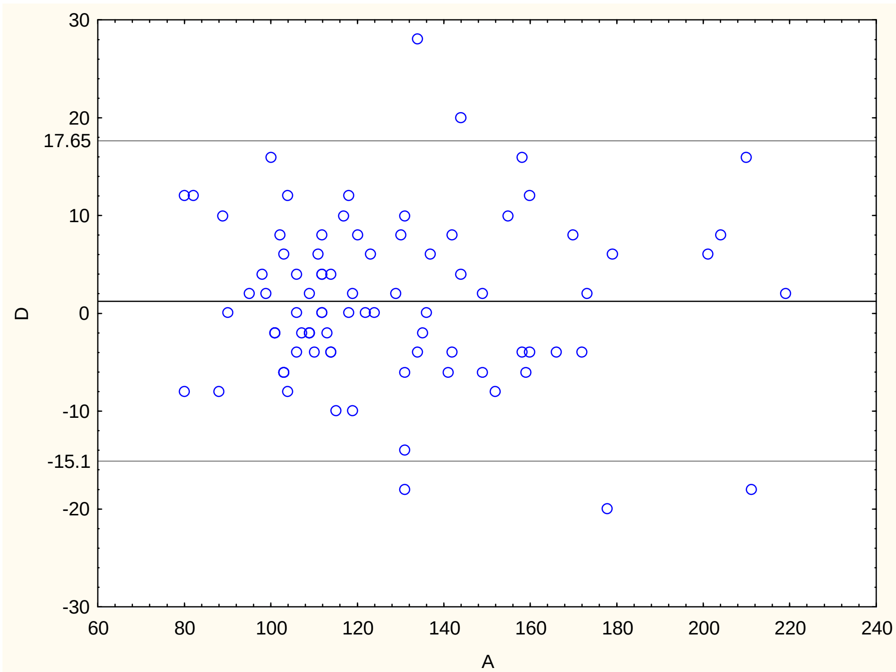
Indien B_h kleiner is as die klinies-aanvaarde absolute verskil tussen meetinstrumente, is daar ‘n statisties-betekenisvolle ooreenstemming op ‘n 5%-peil.

Voorbeeld 6.8 (Yi et al., 2008, Example2):
85 persone se bloeddrukke is elk 3 keer deur ‘n waarnemer gemeet (Table II, Yi et al.)

a) Eerste 2 metings (J1 en J2):

Bland-Altman stipping (Bland & Altman, 1986) van $D = J1 - J2$ en

$A = \frac{1}{2}(J1 + J2)$:



Vaste lyne gee die sydigheid en ooreenstemmingsgrense

$\bar{D} = 1.25$ *and* $\bar{D} \pm 1,96 S_D = 1,25 \pm 1,96 \times 8,366 = (-15,1; 17,65)$.

Enkele verskille lê buite die grense.

$h = 1,96 \times 8,366 = 16,4$, met boonste 95% vertrouensgrens

$$B_h = \frac{1,96\sqrt{85 \times 8,366}}{\sqrt{64,75}} = 18,79$$

Die herhaalbaarheidskoëffisiënt h kan dus met 95% waarskynlikheid so groot wees soos 18, 79.

As die klinies-aanvaarbare verskil 20 is, is daar goeie ooreenstemming.

b) Vir al drie metings (J1 – J3):

Hier is $\hat{\sigma}_w^2 = 37,408$, $SSW = 6359$,

$h = 1,96\sqrt{2 \times 37,408} = 16,95$

$B_h = \dfrac{1,96\sqrt{2 \times 6359}}{140,85} = 18,62$.

□

6.3 Indekse vir kontras-effekte

'n *Kontras van populasie-gemiddeldes* $\mu_1,....\mu_k$ word gedefinieer as (Kline, 2004a: 164):

$$\psi = c_1\mu_1 + c_2\mu_2 + ... + c_k\mu_k = \sum_{i=1}^{k} c_i\mu_i \,, \tag{6.42}$$

waar c_1, c_2 …, c_k *kontrasgewigte* is, sodanig dat

$$c_1 + c_2 + \ldots + c_k = \sum_{i=1}^{k} c_i = 0 \tag{6.43}$$

Soortgelyk is die kontras van steekproefgemiddeldes $\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_k$ as beramer vir ψ:

$$\hat{\psi} = c_1\overline{x}_1 + c_2\overline{x}_2 + ... + c_k\overline{x}_k = \sum_{i=1}^{k} c_i\overline{x}_i \,. \tag{6.44}$$

Voorbeeld 6.9:

Beskou Voorbeeld 6.2 waar die 3 populasies Nie-inboorlinge, stedelik (populasies 1), Inboorlinge, stedelik (populasie 2) en Inboorlinge, platteland (populasie 3) was. In Voorbeeld 6.2 is die omnibus-effek η^2 beraam as 0,069. Ons wil egter die volgende verskille bepaal:

(a) $\mu_1 - \dfrac{1}{2}(\mu_2 + \mu_3)$, d.i. die nie-inboorlinge vs. inboorlinge;

(b) $\mu_2 - \mu_3$, d.i. stedelike vs plattelandse inboorlinge;

(c) $\mu_1 - \mu_2$, d.i. nie-inboorlinge vs inboorlinge in stede.

Die kontrasgewigte is nou:

Kontras	c_1	c_2	c_3	Totaal
(a)	1	-½	-½	0
(b)	0	1	-1	0
(c)	1	-1	0	0

Die kontraste met hulle beramers is dus:

(a) $$\psi = (1)\mu_1 + \left(-\frac{1}{2}\right)\mu_2 + \left(-\frac{1}{2}\right)\mu_3 = \mu_1 - \frac{1}{2}\mu_2 - \frac{1}{2}\mu_3$$

en

$$\hat{\psi} = \bar{x}_1 - \frac{1}{2}\bar{x}_2 - \frac{1}{2}\bar{x}_3 \quad ;$$

(b) $$\psi = (0)\mu_1 + (1)\mu_2 + (-1)\mu_3 = \mu_2 - \mu_3$$

en

$$\hat{\psi} = \bar{x}_2 - \bar{x}_3 \quad ;$$

(c) $$\psi = (1)\mu_1 + (-1)\mu_2 + (0)\mu_3 = \mu_1 - \mu_2$$

en

$$\hat{\psi} = \bar{x}_1 - \bar{x}_2$$ □

Wanneer $k = 2$, vorm $\mu_1 - \mu_2$ ook 'n kontras. Die effekgrootte-indeks om μ_1 en μ_2 te vergelyk, was die gestandaardiseerde verskil:

$$\delta = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\sigma^*} \quad ,$$

waar σ^* 'n standaardafwyking is op verskillende wyse gedefinieer (sien Hoofstuk 4 se inleiding).

Soortgelyk kan ons 'n *gestandaardiseerde kontras* definieer as effekgrootte indeks:

$$\delta_\psi = \frac{\psi}{\sigma^*} \quad \text{en} \quad \hat{\delta}_\psi = \frac{\hat{\psi}}{\hat{\sigma}^*} \tag{6.45}$$

waar $\hat{\delta}_\psi$ die beramer is vir δ_ψ.

6.3.1 Keuses van σ^* en $\hat{\sigma}^*$

Kline (2004a: 172) gee die volgende drie keuses:

1) Kies een populasie (of steekproef) se SA, gewoonlik die kontrole- of verwysingsgroep: $\sigma^* = \sigma_c$, waar σ_c die gekose populasie se SA is. Beramer vir σ^*: $\hat{\sigma}^* = s_c$, die steekproef SA van gekose groep. Dit lewer effekgrootte-indekse soortgelyk aan Glass se Δ op (kyk paragraaf 4.2).

2) Neem aan dat die populasies wat by die kontras betrokke is, dieselfde SA het, nl σ en beraam $\sigma^* = \sigma$ met die saamgestelde SA, $s_{p,\psi}$, waar

$$s_{p,\psi}^2 = \frac{\left(n_{i_1} - 1\right)s_{i_1}^2 + \left(n_{i_2} - 1\right)s_{i2}^2 + \ldots + \left(n_{i_m} - 1\right)s_{im}^2}{n_{i_1} + n_{i_2} + \ldots + n_{i_m} - m} \quad , \tag{6.46}$$

waar n_{i_j} en $n_{i_j}^2$ die steekproefgrootte en variansie is uit populasie i_j, waar $j = 1, \ldots, m,$ met m die getal populasies betrokke by die kontras. Bv. vir kontras (c) in Voorbeeld 6.9 is

$$s_{p,\psi}^2 = \frac{\left(n_1 - 1\right)s_1^2 + \left(n_2 - 1\right)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2},$$

wat maar dieselfde is as s_p^2 in (4.4).

3) Neem aan dat al k populasies dieselfde variansie het en beraam $\sigma^* = \sigma$ met die saamgestelde SA van al die populasies met $s_{p,\psi}$ waar $m = k$ in (6.46). In Voorbeeld 6.9 gee dit

$$s_{p,\psi}^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2 + (n_3 - 1)s_3^2}{n_1 + n_2 + n_3 - 3} .$$

By hierdie drie keuses wat Kline gee, kan ons nog die volgende byvoeg:

4) As geen aanname van gelyke populasie SA's gemaak kan word nie, neem σ^* as die maksimum van die SA's wat in die kontras betrokke is:

$$\sigma_{maks} = maks\left(\sigma_{i_1}, \sigma_{i2}, ..., \sigma_{i_m}\right), \tag{6.47}$$

waar i_j die indeks van die $j-de$ populasie is wat betrokke is. Die voor die handliggende beramer is

$$s_{maks} = maks\left(s_{i_1}, s_{i2}, ..., s_{i_m}\right) \tag{6.48}$$

5) As geen aanname oor gelyke populasie SA's gemaak kan word nie en die populasie groottes is bekend, neem dan σ^* as σ_w, waar

$$\sigma_w^2 = w_{i_1}\sigma_{i_1}^2 + w_{i_2}\sigma_{i_2}^2 + ... + w_{i_m}\sigma_{i_m}^2 , \tag{6.49}$$

met beramer

$$s_w^2 = w_{i_1}s_{i_1}^2 + w_{i_2}s_{i_2}^2 + ... + w_{i_m}s_{i_m}^2 \tag{6.50}$$

waar

$$w_{i_1} = N_{i_1} / N_m, w_{i_2} = N_{i_2} / N_m ,..., w_{i_m} = N_{i_m} / N_m$$

en

$$N_m = N_{i_1} + N_{i_2} + ... + N_{i_m} .$$

Voorbeeld 6.10

By Hoofstuk 3 se Voorbeeld B kan die studente verder opgedeel word in mans en dames. Die beskrywende statistiek vir E/I is aanvullend tot Tabel B.1:

Mans			Dames			Dosente		
n_1	μ_1	σ_1	n_2	μ_2	σ_2	n_3	μ_3	σ_3
121	93,69	24,68	133	95,39	25,15	28	107,64	25,06

Gestel (a) die studente moet met die dosente vergelyk word en verder (b) die mans met die dames.

(a)
$$\psi = \tfrac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2) - \mu_3 = \tfrac{1}{2}(93{,}69 + 95{,}39) - 107{,}64$$
$$= -13{,}1$$

Die effekgroottes as elk van die keuses vir σ^* gemaak word:

1) Neem die dosente as verwysingspopulasie, dan $\sigma^* = \sigma_3 = 25{,}06$

$$13{,}1 / 25 / 06 = -0{,}523\,.$$

Die populasie-variansies is bekend en ongelyk en al drie populasies is betrokke by die kontras, dus neem:

4) $\sigma^* = \sigma_{maks} = \sigma_2 = 25{,}15$

$$\delta_\psi = -13{,}1 / 25{,}15 = -0{,}521$$

5) $\sigma^* = \sigma_w$, met

$$\sigma_{2w}^2 = \frac{121 \times 24{,}68^2 + 133 \times 25{,}15^2 + 28 \times 25{,}06^2}{121 + 133 + 28}$$
$$= \frac{175410{,}98}{282} = 622{,}02,$$

sodat

$$\delta_\psi = -13{,}1 / \sqrt{622{,}02} = -0{,}525.$$

(b) $\psi = \mu_1 - \mu_2 = 93{,}69 - 95{,}39 = -1{,}7$

1) Neem dames as verwysing, $\sigma^* = \sigma_2 ,= 25{,}15$, dus

$$\delta_\psi = \frac{-1{,}7}{25{,}15} = -0{,}0676$$

Aangesien net die eerste 2 populasies betrokke is en die variansies bekend is:

4) $$\sigma^* = \sigma_{maks} = \sigma_2$$

sodat

$\delta_\psi = -0{,}0676$ soos in 1.

5) $$\sigma_w^2 = \frac{121 \times 24{,}68^2 + 133 \times 25{,}15^2}{121+133} = \frac{157826{,}88}{254}$$

$$= 621{,}37$$

$$\delta_\psi = -1{,}7 / \sqrt{621{,}37} = -0{,}0682.$$ □

6.3.2 Riglynwaardes vir effekgroottes van kontraste

Kontraste is in baie gevalle maar die verskil tussen twee gemiddeldes. Verder is dit verskille tussen gemiddeldes van groepe se gemiddeldes. In Voorbeeld 6.9 is die kontraste (b) en (c) telkens verskille tussen 2 gemiddeldes, terwyl kontras (a) die gemiddeld van μ_2 en μ_3 se verskil met μ_1 gee.

Die kontraste word daarna gestandaardiseer deur te deel deur 'n standaardafwyking om 'n effekgrootte-indeks te verkry. Dit is dieselfde vorm as by gestandaardiseerde verskille (bv. δ) in Hoofstuk 4. Dieselfde riglynwaardes as vir δ kan dus gebruik word:

- Klein effek: $\delta_\psi = 0{,}2$
- Medium effek: $\delta_\psi = 0{,}5$
- Groot effek: $\delta_\psi = 0{,}8$

In Voorbeeld 6.9 se kontras (a) lewer al die variasies van effekgrootte ‘n medium-effek op $(\text{-}0,521;\text{-}0,521\ en\ \text{-}0,525)$, terwyl by kontras (b) klein effekte $(\text{-}0,0676;\text{-}0,0676\ en\ \text{-}0,0682)$ verkry is.

6.3.3 Kontraste by afhanklike metings

Wanneer meer as 2 metings op elke persoon of subjek gemaak word, kan gemiddeldes van metings of kombinasies daarvan ook vergelyk word m.b.v. kontraste. Voorbeeld 6.1 gee voorbeelde van sulke kontraste van steekproefgemiddeldes van voor-, na en opvolgtoetse op pasiënte. Kline (2004a: 174) beveel twee metodes om effekgrootte-indekse van sulke kontraste te verkry, aan:

1. Gebruik σ^* en $\hat{\sigma}^*$ soos in die vorige paragraaf. Hier is die standaardisasie van ψ deur deling met ‘n SA op dieselfde skaal as die metings. Hier word die korrelasies wat tussen metings bestaan nie in ag geneem nie.

2. Standaardiseer deur ψ en $\hat{\psi}$ te deel deur die $\sigma_{D\psi}$ of $s_{D\psi}$, die SA van die kontrasverskille binne persone. By Voorbeeld 6.1 word die kontras $\overline{x}_V - \frac{1}{2}(\overline{x}_N + \overline{x}_O)$ gedeel word die SA van $D = x_V - \frac{1}{2}(x_N + x_O)$, bereken vir elke pasiënt as sy voormeting minus die gemiddeld van sy na- en opvolgmetings.
Die effekgrootte is soos in paragraaf 4.4 nou gestandaardiseer in ander eenhede as die metings self, nl. in eenhede van kontrasverskille. Afhangende van die interkorrelasies tussen die metings, kan $\sigma_{D\psi}$ heelwat van σ^* verskil.

Voorbeeld 6.11

(a) Beskou Voorbeeld A, Hoofstuk 3. Gestel die effekgrootte van die kontras $\mu_V - \frac{1}{2}(\mu_N + \mu_O)$ wil beraam word vir die eksperimentele groep. Die steekproef se beskrywende statistiek kan uit Tabel A.1 verkry word. Daarby is ook $\hat{\psi}$ en $s_{D\psi}$ bepaal vir BDI-waardes van die ekspermentele groep (EG):

n	$\hat{\psi}$	$s_{D\psi}$
25	5,3	7,25

Verskillende keuses van $\hat{\sigma}^*$ lewer dan die volgende effekgroottes vir ψ op:

1) $\hat{\sigma}^* = s_v$ (die SA van voortoets as verwysing):

$$\hat{\delta}_\psi = \frac{5,3}{6,14} = 0,86$$

2) $\hat{\sigma}^* = s_p$, die SA, met $n_1 = n_2 = n_3$, sodat:

$$s_p^2 = \frac{1}{3}\left(6,14^2 + 6,82^2 + 4,94^2\right) = 36,21\text{, dus}$$

$$\hat{\delta}_\psi = \frac{5,3}{\sqrt{36,21}} = 0,88$$

3) $\hat{\sigma}^* = s_{maks} = s_N = 6,82$, sodat

$$\hat{\delta}_\psi = \frac{5,3}{6,82} = 0,78$$

Hierdie beramers gebruik 'n SA wat in dieselfde eenhede gemeet word as elkeen van die voor-, na- en opvolgmetings. Dit lewer volgens die riglynwaardes van Cohen, groot effekte op.

4) As ons egter $\hat{\sigma}^* = s_{D\psi} = 7,25$ kies, word

$\hat{\delta}_\psi = \frac{5,3}{7,25} = 0,73$, wat effens kleiner is, maar dan in eenhede van kontrasverskille.

(b) Beskou Voorbeeld E, Hoofstuk 3 en neem die hartpasiënte wat nie geoefen het nie, se 5 cholesterol-waardes om die kontraste $\psi_1 = \mu_1 - \mu_0$, $\psi_2 = \mu_2 - \mu_1$ en $\psi_3 = \mu_4 - \mu_0$ se effekte te bepaal.

Aanvullend tot Tabel E.1 kan die volgende uit die data verkry word:

n	$\hat{\psi}_1$	$s_{\psi 1}$	$\hat{\psi}_2$	$s_{\psi 2}$	$\hat{\psi}_3$	$s_{\psi 3}$
19	8,05	9,24	6,95	8,22	25,0	28,91

1) Neem die cholesterol-waardes in die begin (chol-0) as uitgangspunt, dan is

$$\hat{\delta}\psi_1 = \frac{8{,}05}{21{,}01} = 0{,}383 \ ; \ \hat{\delta}\psi_2 = \frac{6{,}95}{21{,}01} = 0{,}331 \ ; \ \hat{\delta}\psi_3 = \frac{25}{21{,}01} = 1{,}190$$

2) Moenie aanvaar dat SA's van populasie cholesterol-waardes oor die jare gelyk is nie – gebruik die maksimum SA betrokke by elke kontras:

$$\hat{\delta}\psi_1 = \frac{8{,}05}{26{,}41} = 0{,}305 \ ; \ \hat{\delta}\psi_2 = \frac{6{,}95}{26{,}86} = 0{,}259 \ ; \ \hat{\delta}\psi_3 = \frac{25}{42{,}03} = 0{,}595$$

3) As ons effekgroottes in kontrasverskille se aanhede wil verkry:

$$\hat{\delta}\psi_1 = \frac{8{,}05}{9{,}24} = 0{,}871 \ ; \ \hat{\delta}\psi_2 = \frac{6{,}95}{8{,}22} = 0{,}845 \ ; \ \hat{\delta}\psi_3 = \frac{25}{28{,}91} = 0{,}865 .$$

Let op hoe die waardes van die effekgrootte-indekse wissel afhangende van die uitgangspunt. In terme van oorspronklike metings se eenhede, het ψ_1 en ψ_2 beide klein effekte en ψ_3 groot tot medium. Maar neem ons die eenhede van die kontrasverskille as basis, word al drie die kontraste groot effekte.

□

6.3.4 Vertrouensintervalle vir $\delta_\psi = \psi / \sigma^*$, onafhanklike steekproewe

'n Benaderde $(1-\alpha)100\%$ VI vir δ_ψ word verkry deur die VI vir ψ se grense te deel deur die beramer $s_{p,\psi}$ vir σ^* soos in (6.31).

Die $(1-\alpha)100\%$ VI vir ψ wanneer aanvaar word dat die m populasies betrokke by die kontras *dieselfde SA* σ het en normaal verdeel is:

$$\left(\psi_0 ; \psi_B\right) = \hat{\psi} \pm t_{\alpha/2}\left(n_m - m\right) s_{\hat{\psi}} \,, \tag{6.51}$$

waar
$$s_{\hat{\psi}}^2 = \left(\frac{c_1^2}{n_1} + \frac{c_2^2}{n_2} + \ldots + \frac{c_k^2}{n_k}\right) s_{p,\psi}^2 \tag{6.52}$$

en

$t_{\alpha/2}\left(n_m - m\right)$ die $\left(1 - \overline{\alpha}\right)$-de persentiel van ‘n t-verdeling met $n_m - m$ vryheidsgrade, waar $n_m = n_{i_1} + n_{i_2} + \ldots + n_{i_m}$, die totaal van die m steekproewe wat betrokke is by kontras ψ (Kline, 2004a: 175 gee ‘n foutiewe standaardfout $s_{\hat{\psi}}$).

Die benaderde $\left(1-\alpha\right)100\%\ VI$ vir $s_\psi = \dfrac{\psi}{\sigma^*}$:

$$\left(\frac{\psi_0}{\hat{\sigma}^*} \;;\; \frac{\psi_B}{\hat{\sigma}^*}\right) . \tag{6.53}$$

Opmerkings:

1. Indien n_m groot is, is die aanname van normaalverdeelde populasies nie meer nodig nie, en word $t_{\alpha/2}\left(n_m - m\right) = z_{\alpha/2}$ die normaal $\left(1 - \overline{\alpha}\right)$ -persentiel.
2. Indien $s_{p,\psi}$ gebaseer word op al k steekproewe, word $n_m = n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$.

Soos tevore is dit moontlik om ‘n *presiese* VI vir δ_ψ te bereken, onder dieselfde aannames as hierbo. Die stappe is as volg: (Kline, 2004a: 177-179):

1. Bereken

$$t_{\hat{\psi}} = \frac{\hat{\psi}}{s_{\hat{\psi}}} \,, \tag{6.54}$$

   waar $s_{\hat{\psi}}$ deur (6.52) gegee word.
2. Verkry m.b.v. die SAS-program (kyk die webwerf van handleiding)

VI_delta_kontras 'n $(1-\alpha)100\%\ VI$ vir nsp_ψ $(nsp_{\psi,O}; nsp_{\psi,B})$, waar

$$nsp_\psi = \delta_\psi \Big/ \sqrt{\sum_{i=1}^{k} \frac{c_1^2}{n_i}}\ , \tag{6.55}$$

die niesentraliteitsparameter is van 'n nie-sentrale t-verdeling met $n_m - m$ vryheidsgrade. As inset tot die program is $t_{\hat{\psi}}, c_1, c_2, \ldots, c_k, n_1, n_2, \ldots, n_k$ en α (kyk vir teoretiese agtergrond, Bylae A).

3. Die VI vir δ_ψ se grense word verkry uit:

$$\delta_{\psi,o} = nsp_{\psi,o}\sqrt{\sum_{i=1}^{k} \frac{c_1^2}{n_i}}$$

en (6.56)

$$\delta_{\psi,B} = nsp_{\psi,B}\sqrt{\sum_{i=1}^{k} \frac{c_1^2}{n_i}}\ .$$

Let op dat waar die benaderde VI vir δ_ψ gebruik kan word vir enige keuse van σ^* (d.i. σ, σ_{maks} of enige van $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$) deur die beramer $\hat{\sigma}^*$ van σ^* te gebruik, kan die presiese VI slegs vir $\delta_\psi = \psi / \sigma$ gebruik word (d.i. waar gelyke SA's aanvaar word vir die populasies).

Die rekenaarprogram *PSY* deur Bird et.al. (2000) kan uit data gegewe kontraste met vertrouensintervalle bereken en daarna die kontraste standaardiseer deur $s_{p,\psi}$ (wat op al die groepe gebaseer is). Gestandaardiseerde $VI's$ word ook gegee deur die program. Dit lewer dus effekgrootte-indekse in (6.31) met $\hat{\sigma}^* = s_{p,\psi}$ en $VI's$ daarvoor soos in (6.51). Hierdie program is beskikbaar op die webblad van die handleiding.

Voorbeeld 6.12:

Beskou Voorbeeld 6.10 se kontras

(a) $\psi=\mu_1-\frac{1}{2}(\mu_2+\mu_3)$ sodat uit Tabel D.1 volg:

$$\hat{\psi}=13{,}138-\frac{1}{2}(12{,}66+12{,}57)$$
$$=0{,}523$$

Uit Tabel D.2 geld dat $s^2_{p,\psi}=1{,}94$ en verder is

$$s^2_{\hat{\psi}}=1{,}94\left(\frac{1}{159}+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^2}{94}+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^2}{191}\right)=1{,}94(0{,}0063+0{,}0027+0{,}0013)$$
$$=0{,}0199$$

Dus is $\hat{\delta}\psi=\hat{\psi}/s_{p,\psi}=\frac{0{,}523}{1{,}94}=0{,}375$.

Die $95\%\ VI$ vir ψ se grense is nou

$$0{,}523\pm1{,}96\sqrt{0{,}0199}=0{,}523\pm0{,}276=(0{,}247\ ;\ 0{,}799)\ .$$

Die benaderde $95\%\ VI$ vir δ_ψ is gevolglik:

$$\left(0{,}247/\sqrt{1{,}94}\ ;\ 0{,}799/\sqrt{1{,}94}\right)=(0{,}177\ ;\ 0{,}573)\ .$$

Die presiese $95\%\ VI$ vir δ_ψ kan bereken word met die program VI_delta-kontras met $c_1=1,\ c_2=-\frac{1}{2},\ c_3=-\frac{1}{2},\ n_1=159,\ n_2=94\ en\ n_3=191;$ $t_{\hat{\psi}}=\hat{\psi}/s_{\hat{\psi}}=0{,}523/\sqrt{0{,}0199}=3{,}707.$ Dit lewer vir nsp_ψ die interval $(1{,}730\ ;5{,}680)$ op en vir $\delta_\psi:(0{,}175\ ;\ 0{,}576)$, wat baie naby die benaderde interval is. Hierdie vertrouensgrense dui daarop dat die kontras 'n klein tot medium effek kan hê.

□

6.3.5 Vertrouensintervalle vir $\delta_\psi=\psi/\sigma^*$ vir afhanklike steekproewe

Die $(1-\alpha)100\%\ VI$ vir δ_ψ word soortgelyk as in die vorige paragraaf bepaal, behalwe dat die standaardfout van $\hat{\psi}$, nl. $s_{\hat{\psi}}$, nou gegee word deur

$$s_{\hat{\psi}}^2 = \frac{1}{n}\left(c_1^2 + c_2^2 + ... + c_k^2\right) s_{D_\psi}^2 \quad , \tag{6.57}$$

waar n die getal persone of subjekte is en s_{D_ψ} die SA van

$$D_\psi = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_k x_k \, , \tag{6.58}$$

met $x_1, x_2, ..., x_k$ die afhanklike metings per persoon (of subjek).

Dus word die $(1-\alpha)100\%\ VI$ vir ψ:

$$\left(\psi_O, \psi_B\right) = \hat{\psi} \pm t_{\alpha/2}\left(n-1\right) s_{\hat{\psi}}^2 . \tag{6.59}$$

Die benaderde $\left(1-\alpha\right)100\%\ VI$ vir ψ/σ^* word dus weer deur (6.59) gegee, d.i. deur die grense vir ψ elke deur $\hat{\sigma}^*$ te deel.

Die presiese VI vir $\psi/\sigma_{D\psi}$ (waar met die SA van kontrasverskille gestandaardiseer word) kan op soortgelyke wyse as in paragraaf 4.4.1 verkry word. Hier is

$$t_{\hat{\psi}} = \hat{\psi} / s_{\hat{\psi}} \; en \; nsp_\psi = \sqrt{n}\delta_\psi / \sqrt{\sum_{i=1}^{k} c_i^2} , \quad \text{en as} \quad \left(nsp_{\psi,o} \ ; \ nsp_{\psi,B}\right)$$

die VI is vir nsp_ψ , volg dat

$$\delta_{\psi,O} = nsp_{\psi,O} \sum_{i=1}^{k} c_i^2 / \sqrt{n}$$

en (6.60)

$$\delta_{\psi,B} = nsp_{\psi,B} \sum_{i=1}^{k} c_i^2 / \sqrt{n} \; .$$

Die program *VI_delta_kontrasD* kan hier gebruik word en is beskikbaar op die webblad.

Voorbeeld 6.13:

By Voorbeeld 6.11 is die kontras $\psi = \mu_V - \frac{1}{2}(\mu_N + \mu_O)$ se effekgrootte op 4 wyses beraam. Hier was $n = 25$, $c_1 = 1$, $c_2 = -\frac{1}{2}$, $c_3 = -\frac{1}{2}$, $\hat{\psi} = 5{,}3$ en $s_{D_\psi} = 7{,}25$. Die 95% VI vir ψ is dus:

$$\begin{aligned}(\psi_O, \psi_B) &= 5{,}3 \pm t_{0{,}025}(24)\sqrt{1^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} \cdot 7{,}25 / \sqrt{25} \\ &= 5{,}3 \pm 2{,}064\sqrt{1{,}5} \times 7{,}25 / 5 \\ &= 5{,}3 \pm 3{,}665 \\ &= (1{,}635\ ;\ 8{,}965)\end{aligned}$$

Die benaderde VI vir δ_ψ as $\sigma^* = \sigma_V$ is dan: $(1{,}635 / 6{,}14\ ;\ 8{,}965/6{,}14) = (0{,}266\ ;\ 1{,}460)$, wat beteken dat δ_ψ kan varieer tussen ‘n klein effek tot ‘n groot effek met 95% waarskynlikheid. Soortgelyk kan $VI's$ bepaal word wanneer $\hat{\sigma}^* = s_p$ of $\hat{\sigma}^* = s_{maks}$ gekies word. In die geval waar gestandaardiseer word na kontrasverskille se eenhede, geld benaderd: $(1{,}635 / 7{,}25\ ;\ 8{,}965 / 7{,}25) = (0{,}226\ ;\ 1{,}237)$, wat bevestig kan word met die presiese 95% VI:

$t_{\hat{\psi}} = 5{,}3 / \left(\sqrt{1{,}5} \times\ 7{,}25 / 5\right) = 2{,}984$, $\left(nsp_{\psi,O}\ ;\ nsp_{\psi,B}\right) = (0{,}826\ ;\ 5{,}090)$, waarna volg: $\left(\delta_{\psi,O}\ ;\ \delta_{\psi,B}\right) = (0{,}202\ ;\ 1{,}247)$.

Ook hierdie effekgrootte wissel tussen ‘n klein en groot effek.

6.4 Vergelyking van onafhanklike groepe nadat gekontroleer is vir ‘n koveranderlike

In ‘n eksperiment waarin persone of subjekte ewekansig aan behandelingsgroepe toegewys word, verseker hierdie toedeling dat die groepe in ‘n groot mate gelyk is sover dit alle faktore betref wat nie beheer kan word nie. As ‘n navorser drie metodes van onderrig in wiskunde wil vergelyk en hy die studente ewekansig ingedeel het in drie groepe, kan aanvaar word dat as daar verskille is tussen die groepe se toename in prestasie, dit toegeskryf kan word aan die metodes en nie ander faktore soos ouderdom, IK of sosio-ekonomiese status nie.

Dis egter nie altyd moontlik om persone ewekansig in die groepe wat vergelyk wil word, in te deel nie. Neem as voorbeeld Hoofstuk 3 se Voorbeeld F. Hier is die mans in die steekproef agterna ingedeel is die drie aktiwiteitsgroepe op grond van ‘n vraelys oor hulle fisiese aktiwiteite. As die totale serum-cholesterol (S_CHOL) se gemiddeldes nou vergelyk wil word, kan dit wees dat daar ander faktore is wat ‘n rol kan speel maar wat nie gelyk is by die drie groepe nie. So ‘n faktor is bv. ouderdom wat korreleer met cholesterol en wat gevolglik cholesterol kan beïnvloed. As bv. die lae aktiwiteitsgroep se ouderdom hoër is as die ander groepe s’n, kan hoër gemiddelde cholesterol van hierdie groep dalk aan ouderdom toegeskryf word en nie soseer aan die lae aktiwiteit nie. Dit is dus belangrik om vir ouderdom te kontroleer en dit word gedoen met ‘n *kovariansie-analise (ANCOVA).*

Twee aannames word gemaak bo en behalwe dié by ANOVA (Kline, 2004a: 192):

(a) Dat daar *homogeniteit van lineêre regressie* van die afhanklike veranderlike y op die koveranderlike x bestaan. Dit beteken dat die populasies ‘n gemeenskaplike regressiekoefissiënt β het.

(b) Die koveranderlike x word *sonder fout* gemeet.

‘n ANCOVA behels dat onder bg. aannames die afhanklike veranderlike gekorrigeer word vir x deur

$$y' = y - \beta\left(x - \mu_x\right) \quad , \tag{6.61}$$

en dan word 'n ANOVA op y' gedoen.

Gestel dat in die populasie i die aangepaste y_i, nl. y_i' se gemiddeld μ_i' is met gemeenskaplike SA $\sigma_{y.x}$, dan geld dat die variansie van die $\mu_i's$

$$\sigma_{\mu}^2 = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\left(\mu_i' - \mu'\right)^2$$

(soortgelyk aan (6.3)), sodat die proporsie van die totale variansie toe te skryf aan populasielidmaatskap na kontrolering van x word:

$$\eta_{y.x}^2 = \frac{\sigma_{\mu'}^2}{\sigma_{\mu'}^2 + \sigma_{y.x}^2} \tag{6.62}$$

Omdat $\sigma_{\mu'}^2$ en $\sigma_{y.x}^2$ die variansie van die μ_i' en y_i' is net soos in paragraaf 6.1 vir μ_i en y_i die geval was, kan $\eta_{y.x}^2$ as 'n omnibus effekgrootte-indeks beskou word vir die vergelyking van die k populasie-gemiddeldes na kontrolering vir die koveranderlike x (kyk Cohen, 1977: 379).

Vir beraming van $\eta_{y.x}^2$ kan dieselfde effekgrootte-indekse wat gebaseer is op somme van kwadrate van ANOVAs ook hier gebruik word. Let op dat daar 'n bykomende bron van variasie, wat aan die koveranderlike x toegeskryf kan word, is, nl. SK_x sodat

$$SK_{tot} = SK_G + SK_x + SK_F \quad , \tag{6.63}$$

waar SK_G en SK_F albei kleiner word as dié in paragraaf 6.1.1. Die beraamde indeks vir 'n omnibus-effek is dus:

$$\hat{\eta}_{y.x}^2 = \frac{SK_G}{SK_G + SK_F} \quad , \tag{6.64}$$

waar SK_G en SK_F die somme van kwadrate van groepe en foute in 'n ANCOVA is.

Voorbeeld 6.14:

Beskou Voorbeeld F, Hoofstuk 3. Tabel F.2 gee die resultate van die ANCOVA met groepveranderlike aktiwiteitsgroep en koveranderlike ouderdom, wat op S_CHOL gedoen is. Vir ouderdom (x) is $F = 231{,}04\left(p < 0{,}0001\right)$, wat beteken ouderdom het 'n hoogsbetekenisvolle invloed op S_CHOL. Verder is die aktiwiteitsgroepe betekenisvol verskillend t.o.v. die gemiddelde aangepaste S-CHOL (y'), want $F = 3{,}1 \ \left(p = 0{,}046\right)$. Hier is $SK_G = 117750,\ SK_x = 4392610$ en $SK_F = 27168391,$ sodat

$$\hat{\eta}^2_{y.x} = \frac{117750}{117750 + 27168391} = 0{,}0043,$$

wat dui op 'n baie klein effek.

Let op dat die vergelykbare beraming wat op die ANOVA waar nie gekontroleer word vir ouderdom nie, uit Tabel F.4 volg as:

$\hat{\eta}^2_{y.x} = \dfrac{1461712}{33022714} = 0{,}044,$ wat 10 keer groter is as $\hat{\eta}^2_{y.x}$ en 'n medium effek gee. Dit sou dus gevaarlik wees om op grond van die medium effek die afleiding van verskille in gemiddelde S-CHOL oor aktiwiteitsgroepe heen, te maak. As gekontroleer word vir ouderdom, verdwyn hierdie verskille. Let ook op dat by die ANOVA beide SK_G en SK_F vergroot. □

6.4.1 Kontraste by kovariansie-analise

Nadat gekontroleer is vir die koveranderlike x, word 'n kontras:

$\psi' = c_1\mu_1' + c_2\mu_2' + \ldots + c_k\mu_k'$ wat beraam word deur

$$\hat{\psi}' = c_1\overline{y}_1' + c_2\overline{y}_2' + \ldots + c_k\overline{y}_k', \tag{6.65}$$

waar

$$\overline{y}_i' = \overline{y}_i - b\left(\overline{x}_i - \overline{x}\right),\ i = 1,\ldots,k \tag{6.66}$$

met b die gemeenskaplike regressiekoëfisient van al die groepe se lineêre regressie van y op x ; $\bar{x}$ is die gemiddelde van x oor al die groepe heen.

By die uitvoer van 'n ANCOVA met 'n rekenaarpakket, word $\bar{y}_i\,'$ verkry as die aangepaste gemiddeldes ('adjustmented means') of ook as kleinste-kwadrate gemiddeldes ('LS means') – dit is gewoonlik dus nie nodig om $\bar{y}_i\,'$ te bereken uit (6.66) nie.

Die effekgrootte-indeks is gevolglik

$$\delta_{\psi'} = \frac{\psi'}{\sigma^*} \quad ,$$

waar σ^* soos tevore (kyk paragraaf 6.3.1) gekies kan word in terme van die SA's van die populasies se aangepaste y' -waardes.

Vir beraming van $\delta_{\psi'}$ kan volgens Olejnik & Algina (2000: 254) die kontras $\hat{\psi}'$ gestandaardiseer word soos tevore, maar dan moet $\hat{\sigma}^*$ gebaseer wees op 'n SA van die steekproewe se aangepaste waardes. Aanvaar ons gelyke SA's van die aangepaste waardes oor groepe heen, is die maklikste keuse $\hat{\sigma}^* = \sqrt{gemSK_F}$, waar $gemSK_F$ die gemiddelde fout-som van kwadrate van die ANCOVA is. Dus is 'n beraming van die effekgrootte-indeks:

$$\hat{\delta}_{\psi'} = \hat{\psi}' \,/\, \sqrt{gemSK_F} \quad . \qquad (6.67)$$

Voorbeeld 6.15:
Beskou Voorbeeld F, Hoofstuk 3. Gestel ons wil die 3 aktiwiteitsgroepe paarsgewys vergelyk, dan is die kontraste $\psi_1' = \mu_1' - \mu_2'$; $\psi_2' = \mu_1' - \mu_3'$ en $\psi_3' = \mu_2' - \mu_3'$ vergelykings nadat vir ouderdom gekontroleer is. Uit Tabel F.3

word die aangepaste $\bar{y}_i\,'$ - waardes verkry terwyl die gemiddelde fout-som van kwadrate 19012 uit table F.2 is. Die effekgrootte indekse is dus:

$$\hat{\delta}_{\psi 1'} = \frac{528\text{-}531,6}{\sqrt{19012}} = -0,026$$

$$\hat{\delta}_{\psi 2'} = \frac{528\text{-}509}{\sqrt{19012}} = 0,138$$

$$\hat{\delta}_{\psi 3'} = \frac{531,6\text{-}509}{\sqrt{19012}} = 0,164\,.$$

Hierdie gee almal klein effekte wat beteken dat hoewel statisties betekenisvol, verskil die aangepaste gemiddeldes nie soveel ten einde belangrike verskille te wees nie. Selfs die kontras $\psi_2 = \mu_1 - \mu_3$ waar nie gekontroleer word vir ouderdom nie, lewer uit Tabelle F.1 en F.4:

$$\hat{\delta}_{\psi 2} = \frac{552,5\text{-}482,0}{\sqrt{22071}} = 0,475$$, wat 'n medium effek gee, al was die F-toets hoogs betekenisvol. □

6.4.2 Vertrouensintervalle van effekgrootte-indekse na kontrolering van 'n koveranderlike

Omdat die waardes van $y_i\,'$ na kontrolering vir 'n koveranderlike gebruik kan word om onafhanklike groepe te vergelyk soos in paragrawe 6.1 en 6.3 om omnibus- en kontras-effekte te bepaal, kan $(1\text{-}\alpha)100\%$ $VI's$ ook soos tevore in 6.1.2 en 6.3.4 bepaal word. Die benaderde- en presiese $VI's$ vir $\eta^2_{y.x}$ word volgens (6.13), (6.14) en die SAS-program **VI_R2** bepaal, maar nou is die variansieverhouding dié van groepe uit die ANCOVA met $k-1$ en $n-k-1$ vryheidsgrade.

Vir ψ' kan $(1\text{-}\alpha)100\%$ $VI's$ bepaal word volgens (6.45) en (6.46) waar $s^2_{p,\psi} = gemSK_F$ van die ANCOVA met vryheidsgrade $n-k-1$ i.p.v. $n_m - m$. Daarna kan 'n VI vir $\delta_{\psi'}$ bepaal word volgens (6.53) met $\hat{\sigma}^* = \sqrt{gemSK_F}$.

Die presiese VI vir $\delta_{\psi'}$ se berekening word volgens die stappe in paragraaf 6.3.4 gedoen, waar

$$t_{\psi}' = \frac{\hat{\psi}'}{s_{\hat{\psi}}'} \quad ,$$

met $s_{\hat{\psi}}'$ soos in (6.31) met $s^2_{p,\psi} = gemSK_F$ uit die ANCOVA en vryheidsgrade weer $n-k-1$.

Let op dat by die bepaling van al die bg. $VI's$, ons die aanname van homogeniteit van variansies (d.i. dat $\sigma^* = \sigma$) maak.

Voorbeeld 6.16:

In Voorbeeld 6.14 is $\eta^2_{y.x}$ beraam deur $\hat{\eta}^2_{y.x} = 0,0043$. Gebruik (6.12) en Tabel F.2, dan volg dat

$F = 3,1$; w=2×1429 -1=2857 , x=2×3,1/1429 = 0,0043

$C = (2 + 2\times1433\times0,0043)/(2+1433\times0,0043) = 1,755$.

'n 95% VI vir $nsp_F = n\eta^2_{y.x}/(1-\eta^2_{y.x})$ deur (6.12) te gebruik is:

$$nsp_{FO} = \frac{1}{2}\left[2857\times0,0043+1,96^2\left(0,0043+1,755\right) - 4+1,755\right] - 1,96\sqrt{2857\times0,0043\left(0,0043+1,755\right)}$$
$$= 8,399 - 9,112 = -0,713,$$

$$nsp_{FB} = 8,399 + 9,112 = 17,511$$

Omdat nsp_{FO} negatief is, neem ons $nsp_{FO} = 0$, sodat deur (6.13) te gebruik:

$$\eta^2_{y.x,O,ben} = 0$$

$$\eta^2_{y.x,B,ben} = 17,511/\left(17,511+1433\right) = 0,0121.$$

Die 95% VI vir $\eta^2_{y.x}$ is dus $(0;0,012)$, wat bevestig word deur die presiese VI se bogrens $0,01274$ en ondergrens wat nie bereken kon word nie. Vir die effekgrootte-indeks as nie gekontroleer word vir ouderdom nie, lewer die presiese VI : $(0,025\,;0,066)$, wat ‘n klein tot medium effek gee, waar die gekontroleerde geval ‘n klein effek gee.

Die kontras $\psi_2{}' = \mu_1{}' - \mu_3{}'$ in Voorbeeld 6.13 is beraam met $\hat{\psi}_2{}' = 19$ en

$$S_{\hat{\psi}}{}' = \sqrt{\left(\frac{1^2}{728} + \frac{(-1)^2}{468}\right)19012} = 8,169 \quad , \quad \text{dus}$$

$$t_{\psi_2}{}' = 19/8,169 = 2,326 \quad \text{en}$$

$95\%\ VI$ vir $\psi_2{}'$: $19 \ \pm\ 1,96\ \times\ 8,169\ =\ 19\ \pm\ 16,01$

$$= (2,99\ ;\ 35,01),$$

sodat ‘n benaderde $95\%\ VI$ vir $\delta_{\psi_2}{}'$:

$$\left(\frac{2,99}{\sqrt{19012}}\ ;\ \frac{35,01}{\sqrt{19012}}\right) = (0,022\,;0,254)\ .$$

Deur van die program **VI_delta_kontras** gebruik te maak, word prakties dieselfde interval verkry. □

6.4.3 Meer as een koveranderlike

Gestel daar word vir ℓ koveranderlikes gekontroleer, sodat soortgelyk aan (6.66):

$$y' = y - \beta_1\left(x_1 - \mu_{x_1}\right) - \beta_2\left(x_2 - \mu_{x_2}\right) - \ldots - \beta_\ell\left(x_\ell - \mu_{x_\ell}\right) \qquad (6.68)$$

waar y' nou die aangepaste y - waardes is. Soortgelyk aan (6.63) verkry ons

$$SK_{tot} = SK_G + SK_{x_1} + SK_{x_2} + \ldots + SK_{x_\ell} + SK_F \ , \qquad (6.69)$$

sodat SK_G en SK_F die somme van kwadrate is wat oorbly nadat dié van $x_1,\ldots,x_\ell$ weggelaat is. Die omnibus-effek en sy beramer in (6.62) en (6.64) bly dus onveranderd, maar nou met σ_μ^2 , $\sigma_{y.x}^2$ nuwe betekenisse en SK_G en SK_F verkry uit ‘n ANCOVA met $x_1, x_2,\ldots,x_\ell$ as koveranderlikes.

By berekening van $VI's$ word $s^2_{p,\psi'}$ se vryheidsgrade nou $n-k-1$ en word steeds as $gemSK_F$ bereken.